ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

si avrà, in virtù delle (6)″, delle (12) e delle formole (8) della (L),

$$\lim_{p'=p_0} u(x\,,y\,,z) = \mathrm{A}\,.\,u_1(\alpha_0\,,\beta_0) - \varphi(\alpha_0\,,\beta_0) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{\mathrm{X}'_\sigma(\alpha\,,\beta\,;\alpha_0\,,\beta_0)\,\varphi(\alpha\,,\beta) + \cdots\}\,d\sigma = \mathrm{A}\,.\,u_1(\alpha_0\,,\beta_0) + \bar{u}(\alpha_0\,,\beta_0) = u(\alpha_0\,,\beta_0),$$

$$\lim_{p'=p_0} v(x\,,y\,,z) = v(\alpha_0\,,\beta_0)\quad,\quad \lim_{p'=p_0} w(x\,,y\,,z) = w(\alpha_0\,,\beta_0)\,.$$

Dunque *le funzioni* $u(x\,,y\,,z)\,,\,v(x\,,y\,,z)\,,\,w(x\,,y\,,z)$, *date dalle formole* (13), *per* $k > -\frac{2}{3}$ *rappresentano nei punti del campo infinito* S′ *gli integrali dell'equilibrio dei solidi elastici isotropi, corrispondenti ai valori arbitrariamente dati su* σ: $u(\alpha\,,\beta)\,,\,v(\alpha\,,\beta)\,,\,w(\alpha\,,\beta)$.

Meccanica. — *Sul problema derivato di Dirichlet, sul problema dell'elettrostatistica e sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità.* Nota di G. LAURICELLA, presentata dal Socio V. VOLTERRA

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali.* Nota del prof. MARINO PANNELLI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

In una precedente Nota (1) ho dimostrato l'esistenza di alcuni invarianti numerici di una varietà algebrica a tre dimensioni; in questa, studio il loro modo di comportarsi rispetto alle trasformazioni birazionali della varietà (2).

1. Si trasformi dunque birazionalmente la varietà W, supposta immersa in un iperspazio e priva di elementi singolari, in un'altra W′. In W si abbiano σ punti $\mathrm{T}_h (h = 1\,,2\,,3\,,\ldots\,\sigma)$ e τ curve $\mathrm{R}_k (k = 1\,,2\,,3\,,\ldots\,\tau)$ fondamentali per la trasformazione. Sia ϱ_k il genere di un curva R_k, λ_{hk} il numero dei suoi rami passanti per T_h ed i_k il suo grado di multiplicità per

(1) *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XV, 1° sem. 1906.

(2) Le dimostrazioni dei risultati qui esposti sono in alcuni punti forse troppo concise; ciò è dovuto soltanto alla ristrettezza dello spazio concessomi. Così non ho potuto riprodurre gli esempi esaminati per chiarire e confermare i risultati stessi.

una superficie generica del sistema trasformante la varietà W in W'. Riguardo a questi gradi di multiplicità può sempre supporsi che sia

$$i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq i_4 \geq \ldots \geq i_\tau .$$

In fine si indichi con d_k il numero totale dei punti d'appoggio di una curva R_k con tutte le altre curve fondamentali i cui gradi di multiplicità sono inferiori ad i_k; e con δ_k quello dei punti d'appoggio della medesima curva con tutte le successive.

Ad ogni curva fondamentale R_k di W corrisponde in W' una superficie R'_k contenente un fascio, di genere ϱ_k, costituito dalle curve razionali corrispondenti ai punti di R_k. Quindi il genere aritmetico di questa superficie è $-\varrho_k$. Inoltre il fascio anzidetto possiede d_k curve, ciascuna spezzantesi in due, aventi un punto comune, ed oltre queste non contiene nessun'altra curva dotata di un punto doppio. Perciò l'invariante di Castelnuovo-Enriques della medesima superficie R'_k è:

$$-8\varrho_k - d_k + 9 .$$

Ad ogni punto fondamentale T_h di W corrisponde in W' una superficie razionale T'_h, dotata di $\sum_k \lambda_{hk}$ curve eccezionali, corrispondenti ai punti infinitamente vicini a T_h e appartenenti ai rami delle curve R_k passanti per T_h. Quindi il genere aritmetico di questa superficie T'_h è 0, e l'invariante di Castelnuovo-Enriques ad essa relativo è:

$$10 - \sum_k \lambda_{hk} .$$

Come è noto [1] la formazione degli invarianti numerici della varietà W per mezzo di un sistema $|S|$ di superficie S, è indipendente dalla scelta del sistema medesimo; perciò può supporsi che questo abbia una posizione generale rispetto agli elementi di W, che sono fondamentali per la trasformazione, come accade p. es. per il sistema delle sezioni spaziali. Se si indica con P il genere aritmetico di una superficie S di un sistema siffatto; con p il genere dell'intersezione di due qualsivogliano delle sue superficie: con n il numero dei punti comuni a tre delle superficie medesime; e se inoltre P', p', n' hanno gli analoghi significati rispetto agli enti corrispondenti del sistema $|S'|$ che in W' corrisponde ad $|S|$, si ha:

$$\text{(1)} \qquad P' = P \quad , \quad p' = p \quad , \quad n' = n .$$

Una superficie del sistema aggiunto ad $|S'|$ si compone di una superficie S'_a, corrispondente ad una superficie S_a del sistema $|S_a|$ aggiunto ad $|S|$; di

[1] Pannelli, loc. cit.

tutte le superficie R'_k, ciascuna contata una sola volta; e di tutte le superficie T'_h, ciascuna contata due volte (¹).

Il sistema aggiunto ad $|S'|$ è dunque:

$$(2) \qquad \left|S'_a + \sum_k R'_k + 2\sum_h T'_h\right| .$$

2. Ciò premesso, si vuole in primo luogo dimostrare che $\varDelta$ è un *invariante assoluto.*

A tale oggetto si ricordi che questo invariante formato per la varietà W, per mezzo del sistema $|S|$, è definito dalla formola:

$$8\varDelta = 8P_a - \Omega_a - 8P + 2p - n - 15$$

dove P, p, n hanno i significati già loro attribuiti, ed inoltre P_a ed Ω_a sono il genere aritmetico e l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie S_a.

Quindi, se per formare l'invariante analogo $\varDelta'$ della varietà W' si fa uso del sistema trasformato $|S'|$, si ha:

$$8\varDelta' = 8P'_a - \Omega'_a - 8P' + 2p' - n' - 15$$

dove P', p', n' hanno ancora i significati già loro attribuiti, ed inoltre P'_a ed Ω'_a sono il genere aritmetico e l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie del sistema (2).

Dal confronto delle due formole precedenti, segue subito, tenendo conto delle (1), che l'*invarianza assoluta* di $\varDelta$ rimane dimostrata, se si prova l'eguaglianza:

$$(3) \qquad 8P'_a - \Omega'_a = 8P_a - \Omega_a .$$

Ora per calcolare la prima di queste due differenze si applichi la formola (²)

$$(4) \quad 8P - \Omega = 8\sum P_i - \sum \Omega_i + 2\sum (F_i\, F_j\, F_l) + \sum (F_i\, F_i\, F_j) + 9(\nu - 1)$$

relativa alla somma di ν superficie F.

Nel caso attuale in cui questa somma è quella che costituisce una superficie del sistema (2), si ha dapprima:

$$\nu = 2\sigma + \tau + 1$$

epperò:

$$(5) \qquad 9(\nu - 1) = 18\sigma + 9\tau .$$

(¹) Questa proprietà si dimostra come l'analoga sulle superficie; Enriques, *Intorno ai fondamenti della Geometria* ecc. n. 21. Atti dell'Acc. di Torino, vol. XXXVII.

(²) Pannelli, loc. cit., n. 1.

Inoltre:

a) Il genere aritmetico di una superficie S'_a è eguale a quello P_a della superficie corrispondente S_a; di più (n. 1) il genere aritmetico di una superficie R'_k è $-\varrho_k$, e quello di una T'_h è 0. Quindi:

$$\sum P_i = P_a - \sum_k \varrho_k. \tag{6}$$

b) Una superficie generica S_a non passa per nessun punto T_h, mentre incontra ogni curva R_k in α_k punti. Quindi la superficie corrispondente S'_a possiede $\sum\limits_k \alpha_k$ curve eccezionali. Perciò, siccome si è già indicato con Ω_a l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie S_a, così quello della superficie S'_a è:

$$\Omega_a - \sum_k \alpha_k.$$

Gli invarianti analoghi delle superficie R'_k e T'_h sono già stati determinati (n. 1). Si ha dunque:

$$\sum \Omega_i = \Omega_a - \sum_k \alpha_k - 8\sum_k \varrho_k - \sum_k d_k + 9\tau + 20\sigma - 2\sum_{hk} \lambda_{hk}. \tag{7}$$

c) Si ha poi:

$$\begin{aligned}\sum(F_i F_j F_l) = \sum(S'_a R'_k R'_{k'}) + 2\sum(S'_a T'_h T'_{h'}) + \sum(S'_a T'_h T'_h) + 2\sum(S'_a R'_k T'_h)\\ + \sum(R'_k R'_{k'} R'_{k''}) + 2\sum(R'_k R'_{k'} T'_h) + 2\sum(R'_k T'_h T'_{h'}) + \sum(R'_k T'_h T'_h)\\ + 2\sum(T'_h T'_{h'} T'_{h''}) + 2\sum(T'_h T'_h T'_{h'})\end{aligned}$$

dove gli indici k, k', k'' e h, h', h'' debbono variare da 1 sino a τ, o a σ, rispettivamente; ma nello stesso termine non possono prendere valori eguali.

Ora, una superficie generica S_a non passa per nessun punto T_h, nè per nessuno dei punti comuni a due curve R_k; perciò si ha intanto:

$$\sum(S'_a R'_k R'_{k'}) = \sum(S'_a T'_h T'_{h'}) = \sum(S'_a T'_h T'_h) = \sum(S'_a R'_k T'_h) = 0.$$

Tre curve fondamentali R_k non hanno in generale punti comuni, e così due di esse non hanno punti comuni infinitamente vicini ad uno stesso punto fondamentale T_h; quindi in tale ipotesi, si ha ancora:

$$\sum(R'_k R'_{k'} R'_{k''}) = \sum(R'_k R'_{k'} T'_h) = 0 \text{ (1)}.$$

(1) Non è difficile vedere come si modificano queste e le altre formole, se l'ipotesi ora fatta non è verificata; ma le modificazioni, che si debbono introdurre, non alterano il risultato finale.

Le superficie corrispondenti a due punti fondamentali non si tagliano in linee variabili; epperò:

$$\sum(R'_k T'_h T'_{h'}) = \sum(T'_h T'_{h'} T'_{h''}) = \sum(T'_h T'_h T'_{h'}) = 0\,.$$

Infine, una curva R_k ha λ_{hk} punti infinitamente vicini a T_h; e per conseguenza la superficie R'_k ha in comune con la superficie T'_h altrettante curve razionali, eccezionali tanto per l'una quanto per l'altra superficie. Considerate come appartenenti ad R'_k, il grado d'intersezione di ciascuna di esse con sè stessa è 0, e conseguentemente:

$$\sum(R'_k T'_h T'_h) = 0\,.$$

Si ha dunque:

$$\sum(F_i F_j F_l) = 0\,. \tag{8}$$

d) Infine è:

$$\sum(F_i F_i F_j) = \sum(S'_a S'_a R'_k) + 2\sum(S'_a S'_a T'_h) + \sum(R'_k R'_k S'_a)$$
$$+ \sum(R'_k R'_k R'_k) + 2\sum(R'_k R'_k T'_h)$$
$$+ 2\Big[\sum(T'_h T'_h S'_a) + \sum(T'_h T'_h R'_k) + \sum(T'_h T'_h T'_{h'}) + \sum(T'_h T'_h T'_h)\Big]\,.$$

Ora, una curva generica $(S_a S_a)$ non si appoggia alle curve R_k, nè passa per i punti T_h; perciò si ha intanto:

$$\sum(S'_a S'_a R'_k) = \sum(S'_a S'_a T'_h) = 0\,.$$

Agli α_k punti d'intersezione di una superficie S_a con una curva R_k corrispondono sulla superficie S'_a altrettante curve eccezionali, e il grado d'intersezione di ciascuna con sè stessa è -1. Quindi si ha ancora:

$$\sum(R'_k R'_k S'_a) = -\sum_k \alpha_k\,.$$

Ogni curva R_k viene incontrata in d_k punti complessivamente dalle curve $R_{k'}$, i cui gradi di multiplicità per le superficie del sistema trasformante la varietà W in W′ sono inferiori ad i_k. A ciascuno di questi punti corrisponde una curva composta da altre due, aventi un punto comune, una delle quali appartiene alle due superficie R'_k ed $R'_{k'}$. Il grado d'intersezione di questa componente con sè stessa, considerata sulla superficie R'_k, è -1, mentre, considerata sulla superficie $R'_{k'}$, è 0. Per conseguenza si trova:

$$\sum(R'_k R'_k R'_{k'}) = -\sum_k d_k\,.$$

In modo analogo, osservando che una superficie T'_h ha in comune λ_{hk} curve eccezionali con una superficie R'_k, si ottiene:

$$\sum(R'_k R'_k T'_h) = -\sum_{hk} \lambda_{hk}.$$

Inoltre, si è già trovato precedentemente (c):

$$\sum(T'_h T'_h S'_\alpha) = \sum(T'_h T'_h R'_k) = \sum(T'_h T'_h T'_{h'}) = 0.$$

Le superficie S_1 del sistema $|S|$ passanti per un medesimo punto T_h formano un sistema $|S_1|$, contenuto in $|S|$, del grado $n-1$, cui corrisponde in W' un sistema costituito da superficie, ciascuna delle quali è la somma della superficie T'_h con una superficie S'_1 di un determinato sistema $|S'_1|$ del medesimo grado $n-1$ di $|S|$. Tre superficie $S'_1 + T'_h$ si debbono incontrare in n punti; epperò si ha l'eguaglianza:

$$(9) \qquad (S'_1 S'_1 S'_1) + 3(S'_1 S'_1 T'_h) + 3(S'_1 T'_h T'_h) + (T'_h T'_h T'_h) = n$$

nella quale, in virtù del grado del sistema $|S'_1|$, è intanto:

$$(S'_1 S'_1 S'_1) = n - 1.$$

Inoltre, poichè la curva $(S_1 S_1)$ ha un sol punto infinitamente vicino a T_h, si ha ancora:

$$(S'_1 S'_1 T'_h) = 1.$$

Infine, a T_h, che è un punto fondamentale per una superficie S_1, corrisponde sopra S'_1 una curva eccezionale, il cui grado d'intersezione con sè stessa è -1; quindi:

$$(S'_1 T'_h T'_h) = -1.$$

Con ciò l'eguaglianza (9) somministra

$$(T'_h T'_h T'_h) = 1$$

epperò si ha infine:

$$\sum(T'_h T'_h T'_h) = \sigma.$$

Dunque:

$$(10) \qquad \sum(F_i F_i F_j) = -\sum_k \alpha_k - \sum_k d_k - 2\sum_{hk} \lambda_{hk} + 2\sigma.$$

In tal modo sono noti i valori di tutti i termini della formola (4), quando essa si applichi per calcolare la differenza $8P'_a - \Omega'_a$, valori dati dalle (5), (6), (7), (8) e (10). Facendo le sostituzioni si trova che la formola stessa (4) si riduce alla eguaglianza (3), la quale così rimane dimostrata, e quindi, come si è osservato in principio, si può concludere:

L'invariante $\varDelta$ è un invariante assoluto.

3. Si passi ora a studiare il modo di comportarsi degli altri invarianti, rispetto alle trasformazioni birazionali della varietà.

Si ricordi dapprima, che fra $\varDelta$, $\varDelta^{(1)}$, $\varDelta^{(2)}$, $\varDelta^{(3)}$ hanno luogo le relazioni (1):

$$8(\varDelta^{(1)}-\varDelta)=\varDelta^{(2)}-25 \qquad \varDelta^{(2)}-1=4\varDelta^{(3)}.$$

Se $\varDelta_1^{(1)}$, $\varDelta_1^{(2)}$, $\varDelta_1^{(3)}$ sono gli stessi invarianti per la varietà trasformata W', essendo $\varDelta$ un invariante assoluto (n. 2), si ha analogamente:

$$8(\varDelta_1^{(1)}-\varDelta)=\varDelta_1^{(2)}-25 \quad , \quad \varDelta_1^{(2)}-1=4\varDelta_1^{(3)}.$$

Da queste relazioni e dalle precedenti segue:

$$2(\varDelta_1^{(1)}-\varDelta^{(1)})=\varDelta_1^{(3)}-\varDelta^{(3)}. \tag{11}$$

Ciò premesso, conviene anzitutto esaminare l'invariante $\varDelta^{(3)}$ definito dalla formola (2):

$$\varDelta^{(3)}=n_a-3\Omega+6p-4n-3 \tag{12}$$

dove Ω è l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie del sistema $|S|$, p ed n hanno i significati già loro attribuiti ed n_a è il grado del sistema aggiunto $|S_a|$.

Quindi, facendo uso del sistema $|S'|$ corrispondente ad $|S|$, si cerchi l'espressione dell'invariante analogo $\varDelta_1^{(3)}$, per la varietà W', dedotta da W mediante una trasformazione birazionale, che abbia in W un sol punto fondamentale T.

In questa ipotesi, il sistema aggiunto ad $|S'|$ è $|S'_a+2T'|$, il cui grado è:

$$(S'_a S'_a S'_a)+6(S'_a S'_a T')+12(S'_a T' T')+8(T' T' T')$$

ossia:

$$n_a+8$$

perchè il grado $(S'_a S'_a S'_a)$ del sistema $|S'_a|$ è eguale a quello, n_a, di $|S_a|$, e di più (n. 2, *c*) e *d*)) si ha:

$$(S'_a S'_a T')=(S'_a T' T')=0 \quad , \quad (T' T' T')=1.$$

Inoltre, l'invariante Ω' di Castelnuovo-Enriques di una superficie S' è eguale a quello Ω di S, poichè, per le ipotesi fatte, sopra la superficie S' non si hanno curve eccezionali. Quindi, tenendo presenti le relazioni (1) si trova:

$$\varDelta_1^{(3)}=n_a+8-3\Omega+6p-4n-3$$

(1) Pannelli, loc. cit., n. 4 e 5.
(2) Pannelli, loc. cit., n. 5.

donde, per la (12), segue:

$$\Delta_1^{(3)} = \Delta^{(3)} + 8$$

epperò:

1°) In virtù della particolare trasformazione birazionale considerata l'invariante $\Delta^{(3)}$ di W aumenta di 8 unità.

Dalla relazione precedente e dalla (11) si deduce:

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta^{(1)} + 4,$$

e quindi si ha ancora:

2°) In virtù della medesima trasformazione, l'invariante $\Delta^{(1)}$ di W aumenta di 4 unità.

L'invariante $\Delta^{(1)}$ di W è definito dalla formola [1]:

$$(13) \qquad \Delta^{(1)} = P_a - P - \Omega + 3p - 2n - 3$$

dove P_a è il genere aritmetico di una superficie S_a, e gli altri simboli hanno significati già stabiliti.

Quindi, facendo uso del sistema $|S'|$ corrispondente ad $|S|$, si calcoli l'invariante $\Delta_1^{(1)}$ della varietà W', dedotta da W mediante una trasformazione birazionale, che abbia in W un numero σ di punti fondamentali T_h.

In questa ipotesi, il sistema aggiunto ad $|S'|$ è $|S'_a + 2\sum_h T'_h|$, e il genere aritmetico di una sua superficie è [2]:

$$(14) \qquad P_a + X$$

dove per lo scopo che qui si ha in mira, è inutile scrivere esplicitamente i termini contenuti in X.

Come nel caso precedente, è $\Omega' = \Omega$. Quindi tenendo presenti le relazioni (1), si trova:

$$\Delta_1^{(1)} = P_a + X - P - \Omega + 3p - 2n - 3$$

donde, per la (13), segue:

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta^{(1)} + X.$$

D'altra parte, per la proprietà 2°), si ha:

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta^{(1)} + 4\sigma,$$

Dal confronto di questa eguaglianza con la precedente, si deduce:

$$X = 4\sigma$$

e quindi, in virtù della (14), si conclude:

3°) Il genere aritmetico di una superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$ è $P_a + 4\sigma$.

(1) Pannelli, loc. cit., n. 4.
(2) Pannelli, loc. cit., n. 1.

4. Ciò stabilito, si consideri la trasformazione generale della varietà W in un'altra W', definita nel n. 1, e in questa ipotesi si calcoli l'invariante $\varDelta_1^{(1)}$ di W', per mezzo del sistema $|S'|$.

Il sistema aggiunto ad $|S'|$ è il sistema (2), e il genere aritmetico di una sua superficie è eguale alla somma dei generi aritmetici delle due superficie $S'_a + 2 \sum\limits_h T'_h$ e $\sum\limits_k R'_k$, aumentata del genere della intersezione delle superficie medesime.

a) Il modo di comportarsi delle superficie T'_h fra loro e rispetto alla superficie S'_a è indipendente dalla esistenza in W delle curve R_k, queste curve non avendo altro effetto, quando passano per i punti T_h, come qui si suppone, che di introdurre sulle superficie T'_h delle curve eccezionali, le quali non influiscono sul genere aritmetico della superficie $S'_a + 2 \sum\limits_h T'_h$. Quindi (n. 3, 3°)) questo genere aritmetico è $P_a + 4\sigma$.

b) Con un procedimento di ripetizione, si trova che il genere aritmetico della superficie $\sum\limits_k R'_k$ è:

$$-\sum_k \varrho_k + \sum_{k=1}^{k=\tau-1} g(R'_k\,, R'_{k+1} + R'_{k+2} + \cdots + R'_\tau).$$

E poichè una curva R_k si appoggia complessivamente in δ_k punti a tutte le curve successive (n. 1), si ha:

$$g(R'_k\,, R'_{k+1} + R'_{k+2} + \cdots + R'_\tau) = -\delta_k + 1$$

donde:

$$\sum_{k=1}^{k=\tau-1} g(R'_k\,, R'_{k+1} + R'_{k+2} + \cdots + R'_\tau) = -\sum \delta_k + \tau - 1\,.$$

Quindi il genere aritmetico della superficie $\sum\limits_k R'_k$ è:

$$-\sum_k \varrho_k - \sum_k \delta_k + \tau - 1 = -\varrho\,,$$

indicando con ϱ il genere della curva composta da tutte le curve fondamentali R_k.

c) L'intersezione delle due superficie $S'_a + 2 \sum\limits_h T'_h$ e $\sum\limits_k R'_k$ si compone di $\tau + 2\sigma\tau$ curve, due qualunque delle quali non hanno punti comuni; quindi il suo genere è:

$$\sum_k g(S'_a R'_k) + 2 \sum_{hk} g(T'_h R'_k) - \tau - 2\sigma\tau + 1\,.$$

Ora, poichè una curva R_k incontra una superficie S_a in α_k punti, si ha:

$$\sum_k g(S'_a R'_k) = -\sum_k \alpha_k + \tau\,.$$

Inoltre, siccome una curva R_k possiede in ogni T_h un punto multiplo secondo λ_{hk}, così si ha ancora:

$$\sum_{hk} g(T'_h R'_k) = -\sum_{hk} \lambda_{hk} + \sigma\tau = -\lambda + \sigma\tau$$

ove si chiami λ il numero totale dei rami delle curve R_k passanti per i punti T_h.

Così per il genere dell'intersezione delle due superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$ e $\sum_k R'_k$ si trova:

$$-\sum_k \alpha_k - 2\lambda + 1 .$$

Quindi, per quanto si è osservato in principio, il genere aritmetico di una superficie del sistema (2), è:

$$P_a + 4\sigma - \varrho - 2\lambda - \sum_k \alpha_k + 1 .$$

Se si dice β_k il numero delle intersezioni di una superficie S con una curva R_k, l'invariante di Castelnuovo-Enriques della superficie corrispondente S' è:

$$\Omega - \sum_k \beta_k .$$

Infine, i valori di P', p', n' sono dati dalle formole (1).

Così si hanno tutti gli elementi necessari per calcolare l'invariante $\varDelta_1^{(1)}$, definito dalla formola (13) applicata al sistema $|S'|$ della varietà W'; quindi si trova:

$$\varDelta_1^{(1)} = P_a + 4\sigma - \varrho - 2\lambda - \sum_k \alpha_k + 1 - P - \Omega + \sum_k \beta_k + 3p - 2n - 3$$

donde, tenendo presente la stessa formola (13) ed osservando che l'espressione:

$$\sum_k \alpha_k - \sum_k \beta_k$$

è il carattere d'immersione θ della curva composta da tutte le curve fondamentali R_k [1], segue:

$$\varDelta_1^{(1)} = \varDelta^{(1)} + 4\sigma - (\varrho + \theta + 2\lambda - 1).$$

[1] In virtù della proprietà fondamentale delle superficie aggiunte (Pannelli, loc. cit., n. 1, teor. IV), si ha:

$$|S_a - S| = |S'_a - S'|$$

donde, indicando con K una curva qualunque (semplice o composta) della varietà W segue

$$(KS_a) - (KS) = (KS'_a) - (KS')$$

il che dimostra che il numero

$$(KS_a) - (KS)$$

non dipende dalla scelta del sistema $|S|$, ma solo dalla curva K in quanto è data nella varietà W. Questo numero chiamasi *carattere d'immersione* della curva K nella varietà W.

Dunque:

Se la varietà W si trasforma birazionalmente nella varietà W', l'invariante $\Delta^{(1)}$ di W aumenta del numero:

$$[4\sigma - (\varrho + \theta + 2\lambda - 1)] - [4\sigma' - (\varrho' + \theta' + 2\lambda' - 1)]$$

dove σ è il numero dei punti, ϱ il genere e θ il carattere d'immersione della curva composta dalle curve, che insieme a quei punti costituiscono in W gli elementi fondamentali della trasformazione e λ è il numero totale dei rami di queste curve passanti per i punti medesimi. Inoltre σ', ϱ', θ' e λ' hanno i medesimi significati rispetto agli elementi fondamentali di W', che sono semplici per questa varietà.

Per mezzo delle relazioni che legano $\Delta^{(1)}$ agli altri invarianti $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, $\Delta^{(4)}$ è facile, volendo, trovare le modificazioni che subiscono questi stessi invarianti nelle trasformazioni birazionali della varietà.

Matematica. — *Sur les fonctions dérivées.* Nota di Henri Lebesgue, presentata dal Socio C. Segre.

Fisica. — *Sopra un nuovo sistema di telegrafia senza filo.* Nota di Alessandro Artom, presentata dal Corrispondente G. Grassi.

Fisica. — *Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane.* Nota del prof. Riccardo Arnò, presentata dal Socio G. Colombo.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio ed il selenio* [1]. Nota di Giovanni Pellini, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

La posizione del tellurio nel gruppo sesto del sistema periodico, mentre è resa ragionevole dalle spiccate analogie di questo elemento con lo zolfo ed il selenio, è ostacolata dai caratteri principali che determinarono la posizione degli elementi nel sistema, il peso atomico e le relazioni di isomorfismo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Padova.