# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XV.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

durata abbia luogo entro il tubo. Infatti non si capirebbe altrimenti come mai il campo magnetico dovesse facilitare la scarica attraverso il gas estremamente rarefatto. Se invece si suppone, che sempre si inizi il fenomeno della scarica entro il tubo, e che ciò dia luogo (come si è detto più sopra per spiegare il fenomeno *e*)) alla formazione di un accumulo di ioni positivi presso il catodo, che impedisce la continuazione della scarica stessa, allora si comprende bene che il campo magnetico possa esercitare un'azione sul tubo. Quest'azione, secondo quanto fu detto più sopra, sarebbe precisamente quella di deviare gli elettroni e d'impedire in tal modo quella specie d'ingorgo dei ioni positivi che, secondo la spiegazione da me proposta pel fenomeno *e*), costituisce l'ostacolo alla continuazione della scarica.

**Matematica.** — *Sull'applicazione del metodo delle immagini alle equazioni del tipo iperbolico.* Nota del Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sulle equazioni a derivate parziali.* Nota del Corrispondente C. ARZELÀ.

Nella mia recente Nota: *Esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali*, la costruzione delle funzioni $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, ... deve essere, per la piena validità del resultato, alquanto modificata, nel modo che spiegherò prossimamente.

**Matematica.** — *Sui simboli di Riemann nel Calcolo differenziale assoluto.* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Questa breve Nota ha per oggetto una osservazione sui simboli a quattro indici (detti di Riemann) che hanno, come si sa, un'importanza tanto fondamentale nella teoria delle forme differenziali quadratiche e nel Calcolo differenziale assoluto.

Per evitare di ripetere inutilmente cose note, mi riferirò per quanto riguarda le denominazioni, le notazioni e le succitate teorie al vol. I della *Geometria differenziale* del Bianchi (Pisa, 2ª ediz., 1902), e alla Memoria di Ricci e Levi Civita nei Math. Annalen, t. 54, pag. 125.

Un simbolo di Riemann di 1ª specie (che indicheremo con $R_{r_1 r_2, s_1 s_2}$) è la differenza di due espressioni formate in modo analogo mediante simboli di Christoffel a tre indici; propriamente, indicando con $D_s$ l'operazione che applicata ad un simbolo di Christoffel a tre indici è:

(1) $$D_s \begin{bmatrix} r\,t \\ u \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_s} \begin{bmatrix} r\,t \\ u \end{bmatrix} - \sum_p \begin{Bmatrix} s\,u \\ p \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} r\,t \\ p \end{bmatrix}$$

si ha:

(2) $$R_{r_1 r_2, s_1 s_2} = D_{s_2} \begin{bmatrix} r_1\,s_1 \\ r_2 \end{bmatrix} - D_{s_1} \begin{bmatrix} r_1\,s_2 \\ r_2 \end{bmatrix}.$$

I simboli di Christoffel a tre indici non formano un *sistema covariante* nel senso del Calcolo differenziale assoluto, e non lo formano neanche le loro dedotte D definite dalla (1), ma (e questa è la nota proprietà fondamentale dei simboli Riemanniani) lo formano invece le differenze di queste ultime combinate secondo la formola (2).

L'osservazione cui si riferisce la presente Nota è questa: che introducendo oltre i coefficienti a due indici della forma quadratica fondamentale, altri coefficienti a tre e quattro indici, che si trasformino come quelli di una forma differenziale completa di 4° ordine, *il simbolo di Riemann si può comporre come la differenza di due elementi di un medesimo sistema covariante.*

Insieme ai coefficienti $X_{ij}$ della forma differenziale quadratica fondamentale

(3) $$\sum X_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

introduciamo i coefficienti $X_{ijh}$, $X_{ijhk}$ che si trasformino come quelli di una forma differenziale di 4° ordine di cui siano zero i coefficienti ad un solo indice, e di cui siano i medesimi $X_{ij}$ i coefficienti a due indici:

(4) $$\sum_{ij} X_{ij}\, \delta^{(4)}_{ij} + \sum_{ijh} X_{ijh}\, \delta^{(4)}_{ijh} + \sum_{ijhk} X_{ijhk}\, \delta^{(4)}_{ijhk}$$

essendo le $\delta$ quelle formazioni differenziali ben note che io ho introdotte e studiate in lavori precedenti [1]; la forma differenziale quadratica (3) è un *covariante* della forma (4).

In una Nota del 1903 [2] ho introdotto per le forme differenziali generali delle formazioni fondamentali, che ho rappresentate con delle doppie parentesi rotonde, formazioni alle quali direttamente o indirettamente fanno capo tutte le altre che è necessario introdurre nella teorica delle forme differenziali.

[1] V. p. es. Rend. Acc. Lincei (5), t. XII, 1° sem. 1903, pag. 325.
[2] Ibid., pag. 367.

La derivata di una tale formazione si esprime colla semplice formola

$$(5)\quad \frac{\partial}{\partial x_h}((i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu)) = ((i_1 \dots i_m h, j_1 \dots j_\mu)) + ((i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu h)),$$

e la loro trasformazione si fa come quella del prodotto delle due X, aventi rispettivamente per indici quelli del primo e quelli del secondo gruppo del simbolo.

Se ora poniamo in generale:

$$(6)\quad \begin{cases} ((i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu)) + (-1)^{m+\mu}((j_1 \dots j_\mu, i_1 \dots i_m)) = \{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu\} \\ ((i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu)) - (-1)^{m+\mu}((j_1 \dots j_\mu, i_1 \dots i_m)) = (i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu) \end{cases}$$

otteniamo da (5) le formole:

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_h}\{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu\} = (i_1 \dots i_m h, j_1 \dots j_\mu) + (i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu h) \\ \frac{\partial}{\partial x_h}(i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu) = \{i_1 \dots i_m h, j_1 \dots j_\mu\} + \{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu h\}. \end{cases}$$

Si riconosce subito che il simbolo di Christoffel di 1ª specie $\begin{bmatrix} rs \\ t \end{bmatrix}$ relativo alla forma (3) è, a meno di un fattore, il simbolo $(rs, t)$ relativo alla forma (4); propriamente è:

$$(8)\quad \begin{bmatrix} rs \\ t \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}(rs, t),$$

e che il simbolo di Christoffel di 2ª specie è similmente

$$(9)\quad \begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\sum_h A_{ht}(rs, h),$$

essendo al solito le $A_{ht}$ i rapporti dei complementi algebrici degli elementi del determinante $|X_{ij}|$, per il determinante stesso.

Di qui si ha che la prima parte del simbolo di Riemann (2) diventa

$$(10)\quad D_{s_2}\begin{bmatrix} r_1 s_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{s_2}}(r_1 s_1, r_2) - \frac{1}{4}\sum_p\sum_q A_{pq}(r_1 s_1, p)(r_2 s_2, q)$$
$$= -\frac{1}{2}\{r_1 s_1, r_2 s_2\} - \frac{1}{2}\{r_1 s_1 s_2, r_2\} - \frac{1}{4}\sum_p\sum_q A_{pq}(r_1 s_1, p)(r_2 s_2, q)$$

e ponendo

$$(11)\quad [r_1 s_1, r_2 s_2] = -\frac{1}{2}\{r_1 s_1, r_2 s_2\} - \frac{1}{4}\sum_p\sum_q A_{pq}(r_1 s_1, p)(r_2 s_2, q)$$

il simbolo di Riemann si esprimerà colla differenza

$$(12)\quad R_{r_1 r_2, s_1 s_2} = [r_1 s_1, r_2 s_2] - [r_1 s_2, r_2 s_1].$$

Ora io dico che *gli elementi* (11) *formano un sistema covariante nel senso del calcolo differenziale assoluto.*

Infatti, immaginando una trasformazione delle variabili $x$ nelle $y$, le formazioni di cui risulta il secondo membro di (11) si trasformano con formole che, tenendo conto di (6), si deducono facilmente da quelle da noi esposte nelle succitate Note. Indichiamo con Y i coefficienti della trasformata di (4), con $A'_{ij}$ i rapporti analoghi agli $A_{pq}$ ma formati colle Y, anzichè colle X, e ricordiamo che

$$A_{pq} = \sum_{ij} A'_{ij} \frac{\partial x_p}{\partial y_i} \frac{\partial x_q}{\partial y_j}.$$

Abbiamo allora, esprimendo per le Y il secondo membro di (11) che è calcolato per le X:

$$
\begin{aligned}
[r_1 s_1 , r_2 s_2]_{\mathrm{X}} = & -\frac{1}{2} \sum_{hk} \}h_1 k_1 , h_2 k_2\{_{\mathrm{Y}} \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{h_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial y_{k_2}}{\partial x_{s_2}} - \\
& -\frac{1}{2} \sum_{hkl} (l , h k)_{\mathrm{Y}} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_{r_1} \partial x_{s_1}} \frac{\partial y_h}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial y_k}{\partial x_{s_2}} - \frac{1}{2} \sum_{hkl} (h k , l)_{\mathrm{Y}} \frac{\partial y_h}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial y_k}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_{r_2} \partial x_{s_2}} - \\
& -\frac{1}{2} \sum_{kl} \}k , l\{_{\mathrm{Y}} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_{r_1} \partial x_{s_1}} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_{r_2} \partial x_{s_2}} - \\
& -\frac{1}{4} \sum_{pqij} A'_{ij} \frac{\partial x_p}{\partial y_i} \frac{\partial x_q}{\partial y_j} \left[ \sum_{hkl} (h k , l)_{\mathrm{Y}} \frac{\partial y_h}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_l}{\partial x_p} + \sum_{kl} \}k , l\{_{\mathrm{Y}} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_{r_1} \partial x_{s_1}} \frac{\partial y_l}{\partial x_p} \right] \times \\
& \times \left[ \sum_{h'k'l'} (h' k' , l')_{\mathrm{Y}} \frac{\partial y_{h'}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial y_{k'}}{\partial x_{s_2}} \frac{\partial y_{l'}}{\partial x_q} + \sum_{k'l'} \}k' , l'\{_{\mathrm{Y}} \frac{\partial^2 y_{k'}}{\partial x_{r_2} \partial x_{s_2}} \frac{\partial y_{l'}}{\partial x_q} \right].
\end{aligned}
$$

Osservando ora che

$$\sum_{ij} \frac{\partial x_p}{\partial y_i} \frac{\partial x_q}{\partial y_j} \frac{\partial y_l}{\partial x_p} \frac{\partial y_{l'}}{\partial x_q}$$

è eguale ad 1 solo quando $i = l$ e $j = l'$, ed è eguale a zero in ogni altro caso; che, essendo zero i coefficienti ad un solo indice della forma differenziale (4) e quindi anche della sua trasformata, i simboli $\}k , l\{_{\mathrm{Y}}$ sono eguali a $-2\,\mathrm{Y}_{kl}$, e quindi

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \sum_{ij} A'_{ij} \}k , i\{_{\mathrm{Y}} = \sum_{ij} A'_{ij} \mathrm{Y}_{ki} &= 1 \qquad \text{se } j = k \\
&= 0 \qquad \text{se } j \neq k ,
\end{aligned}
$$

e infine osservando che $(l , h k) = (h k , l)$, si riconosce che il secondo membro della precedente formola può porsi sotto la forma

$$-\frac{1}{2} \sum_{hk} \left[ \}h_1 k_1 , h_2 k_2\{_{\mathrm{Y}} + \frac{1}{2} \sum_{ij} A'_{ij} (h_1 k_1 , i)_{\mathrm{Y}} (h_2 k_2 , j)_{\mathrm{Y}} \right] \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{h_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial y_{k_2}}{\partial x_{s_2}}$$

cioè si ha la formola

$$(13)\qquad [r_1 s_1, r_2 s_2]_x = \sum_{hk} [h_1 k_1, h_2 k_2]_y \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{h_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial y_{k_2}}{\partial x_{s_2}}$$

che dimostra il nostro assunto.

*I simboli di Riemann dunque, oltre che formare essi stessi un sistema covariante, possono comporsi come differenze di due elementi di un altro sistema covariante nel senso del Calcolo differenziale assoluto.*

## Matematica. — *Ricerche sopra le funzioni derivate.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Socio C. Segre.

In questa Nota vogliamo riannodare alle proposizioni relative alle funzioni derivate, dimostrate nella Nota precedente (1), il problema delle funzioni primitive e il teorema fondamentale del calcolo integrale, e dedurne ancora alcuni corollari per le funzioni derivate medesime.

Dobbiamo perciò premettere una proposizione relativa all'integrale indefinito di una funzione integrabile nel senso del Lebesgue:

1. *L'integrale indefinito di una funzione integrabile in un intervallo $a \ldots b$ nel senso del Lebesgue, ammette in tutti i punti dell'intervallo, fatta al più eccezione per quelli di un aggregato di misura nulla, derivata unica e determinata ed uguale precisamente alla funzione integrando.*

La proposizione sarà evidentemente dimostrata quando sia provato che, separatamente, la funzione integrale ammette derivate determinate a destra e a sinistra uguali ciascuna alla funzione integrando, in tutti i punti dell'intervallo $a \ldots b$ fatta al più eccezione per quelli di un aggregato di misura nulla.

Ci occuperemo, per fissare le idee, della derivata a destra. Sia $f(x)$ la funzione che si integra e si ponga

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\, dx\,.$$

Sarà

$$r[\Phi(x), x_0, x_0 + h] = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx\,.$$

Per l'ipotesi dell'integrabilità di $f(x)$, dato arbitrariamente un $\varepsilon$, si può determinare nell'intervallo $a \ldots b$ un aggregato $K_\varepsilon$ tale che:

1° La misura di $K_\varepsilon$ sia $\leq \varepsilon$;

(1) Questi Rendiconti, pag. 551.