ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

cioè si ha la formola

$$(13)\qquad [r_1 s_1, r_2 s_2]_x = \sum_{hk} [h_1 k_1, h_2 k_2]_Y \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{h_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial y_{k_2}}{\partial x_{s_2}}$$

che dimostra il nostro assunto.

I simboli di Riemann dunque, oltre che formare essi stessi un sistema covariante, possono comporsi come differenze di due elementi di un altro sistema covariante nel senso del Calcolo differenziale assoluto.

Matematica. — *Ricerche sopra le funzioni derivate.* Nota di BEPPO LEVI, presentata dal Socio C. SEGRE.

In questa Nota vogliamo riannodare alle proposizioni relative alle funzioni derivate, dimostrate nella Nota precedente (¹), il problema delle funzioni primitive e il teorema fondamentale del calcolo integrale, e dedurne ancora alcuni corollari per le funzioni derivate medesime.

Dobbiamo perciò premettere una proposizione relativa all'integrale indefinito di una funzione integrabile nel senso del Lebesgue:

1. *L'integrale indefinito di una funzione integrabile in un intervallo $a \dots b$ nel senso del Lebesgue, ammette in tutti i punti dell'intervallo, fatta al più eccezione per quelli di un aggregato di misura nulla, derivata unica e determinata ed uguale precisamente alla funzione integrando.*

La proposizione sarà evidentemente dimostrata quando sia provato che, separatamente, la funzione integrale ammette derivate determinate a destra e a sinistra uguali ciascuna alla funzione integrando, in tutti i punti dell'intervallo $a \dots b$ fatta al più eccezione per quelli di un aggregato di misura nulla.

Ci occuperemo, per fissare le idee, della derivata a destra. Sia $f(x)$ la funzione che si integra e si ponga

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx .$$

Sarà

$$r[\Phi(x), x_0, x_0 + h] = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx .$$

Per l'ipotesi dell'integrabilità di $f(x)$, dato arbitrariamente un ε, si può determinare nell'intervallo $a \dots b$ un aggregato K_ε tale che:

1° La misura di K_ε sia $\leq \varepsilon$;

(¹) Questi Rendiconti, pag. 551.

2° Esista uno ξ tale che in ogni punto di $a \dots b$, fuori di K_ε, $|f(x)| \leq \xi$;

3° $\int_{K_\varepsilon} |f(x)|\, dx \leq \varepsilon$.

Si chiami $f_\varepsilon(x)$ la funzione che è uguale a $f(x)$ in ogni punto di $a \dots b$ non appartenente a K_ε ed è nulla nei punti di K_ε; $f_\varepsilon(x)$ sarà misurabile e, per un teorema dovuto ai sig. Borel, Lebesgue e Vitali [1], si può determinare in $a \dots b$ un aggregato chiuso di misura $\geq b - a - \frac{\varepsilon}{\xi}$ tale che i valori di $f_\varepsilon(x)$ in esso formino una funzione continua. Si chiamino rispettivamente C_ε la parte di questo aggregato e D_ε la parte dell'aggregato complementare esterne a K_ε. La misura di C_ε sarà $c_\varepsilon \geq b - a - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\xi}$, quella di D_ε è $d_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{\xi}$.

Sarà

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx = \int_{x_0\,(C\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\, dx + \int_{x_0\,(D\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\, dx + \int_{x_0\,(K\varepsilon)}^{x_0+h} f(x)\, dx$$

dove gli indici C_ε, D_ε, K_ε apposti ai tre integrali significano che essi sono presi negli aggregati di punti dell'intervallo $x_0 \dots x_0 + h$ appartenenti rispettivamente a C_ε, D_ε, K_ε. Chiameremo rispettivamente $\gamma_\varepsilon(x_0 h)$, $\delta_\varepsilon(x_0 h)$, $\varkappa_\varepsilon(x_0 h)$ le misure di queste tre parti di $x_0 \dots x_0 + h$, per modo che sarà

$$\gamma_\varepsilon + \delta_\varepsilon + \varkappa_\varepsilon = h.$$

Noi porteremo ora la nostra attenzione sui soli punti x_0 che appartengono a C_ε.

Si ricordi che, in ogni punto, $|f_\varepsilon(x)| \leq \xi$; sarà quindi

$$\left| \int_{x_0\,(D\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\, dx \right| \leq \xi \delta_\varepsilon(x_0 h).$$

Ciascuno dei numeri γ_ε, δ_ε, $\varkappa_\varepsilon$ è funzione di h e di x_0 e tende a 0 con h: si può quindi considerare il $\overline{\lim}_{h=0} \frac{\xi \delta_\varepsilon}{h}$ come funzione di x_0, e considerare l'aggregato $M_{\varepsilon\eta}$ dei punti x_0 (di C_ε) per cui

$$\overline{\lim_{h=0}} \frac{\xi \delta_\varepsilon(x_0 h)}{h} \geq \eta,$$

[1] Borel, *Un théorème sur les ensembles mesurables,* Comptes-rendus, déc. 1903; Lebesgue, *Sur une propriété des fonctions,* Comptes-rendus, déc. 1903, Vitali, *Una proprietà delle funzioni misurabili,* Rend. dell'Istituto Lombardo (2) 38, 1905, § 3, pag. 601.

dove η è un numero positivo arbitrariamente assegnato; sia μ la misura di $M_{\varepsilon\eta}$.

L'aggregato $M_{\varepsilon\eta}$ si può generare come segue:

Si consideri l'aggregato dei punti x_0 di C_ε per ciascuno dei quali avviene che, per qualche h tale che $\sigma \geq h \geq \tau > 0$, $\dfrac{\xi\delta_\varepsilon(x_0\, h)}{h} \geq \eta_\varsigma\ (\eta_\varsigma < \eta)$ e si chiami $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$; per ogni coppia assegnata di numeri τ, $\sigma\ (> 0)$, $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ è chiuso perchè se $\overline{x}_0$ è il limite d'una serie di punti x_0 appartenenti a $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ e $\overline{h}$ è un limite di valori corrispondenti di h, sarà pure $\sigma \geq \overline{h} \geq \tau$; inoltre $\delta_\varepsilon(\overline{x}_0\, \overline{h})$ sarà il limite dei numeri $\delta_\varepsilon(x_0\, h)$ relativi a questi punti x_0 e a questi h, e quindi $\dfrac{\zeta\delta_\varepsilon(\overline{x}_0\, \overline{h})}{\overline{h}} \geq \eta_\varsigma$. Sarà $M_{\varepsilon\eta} = \lim\limits_{\eta_\varsigma=\eta} \lim\limits_{\sigma=0} (\lim\limits_{\tau=0} M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma})$.

Se x_0 è un punto qualunque di $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$, si chiami h_0 il massimo valore di h per cui $\dfrac{\xi\delta_\varepsilon(x_0\, h)}{h} \geq \eta_\varsigma$; il punto $x_0 + h_0$ non potrà appartenere a $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$, perchè in tale ipotesi si potrebbe determinare un $\chi > 0$ (anzi $\geq \tau$) tale che $\dfrac{\xi\delta_\varepsilon(x_0 + h_0\,,\, \chi)}{\chi} \geq \eta_\varsigma$ e sarebbe quindi ancora $\dfrac{\xi\delta_\varepsilon(x_0\,,\, h_0 + \chi)}{h_0 + \chi} \geq \eta_\varsigma$. A causa di ciò, e perchè $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ è chiuso, ha un senso ben determinato il parlare del primo punto di $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ seguente $x_0 + h_0$. Ciò posto, sia x'_0 il primo punto (a sinistra) del segmento $a \dots b$ appartenente a $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$, h'_0 il corrispondente valore di h_0, x''_0 il primo punto di $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ seguente $x'_0 + h'_0$, h''_0 il valore corrispondente di h_0 e così via. L'aggregato $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ sarà tutto contenuto nell'aggregato numerabile di segmenti esterni l'uno all'altro $x_0^{(i)} \dots x_0^{(i)} + h_0^{(i)}$, e se $\mu_{\tau\sigma\varsigma}$ è la sua misura, $\mu_{\tau\sigma\varsigma} \leq \sum\limits_i h_0^{(i)}$. Ma se $\delta_\varepsilon^{(i)}$ è la misura della parte di D_ε contenuta in $x_0^{(i)} \dots x_0^{(i)} + h_0^{(i)}$, si ha, per ipotesi,

$$\frac{\xi\delta_\varepsilon^{(i)}}{h_0^{(i)}} \geq \eta_\varsigma \quad , \quad h_0^{(i)} \leq \frac{\xi\delta_\varepsilon^{(i)}}{\eta_\varsigma}\ ;$$

dunque infine

$$\mu_{\tau\sigma\varsigma} \leq \sum_i \frac{\xi\delta_\varepsilon^{(i)}}{\eta_\varsigma} = \frac{\xi}{\eta_\varsigma} \sum_i \delta_\varepsilon^{(i)} \leq \frac{\xi}{\eta_\varsigma}\, d_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{\eta_\varsigma}$$

ed anche

$$\mu = \lim_{\eta_\sigma=\eta} \lim_{\sigma=0} \lim_{\tau=0} \mu_{\tau\sigma\varsigma} \leq \frac{\varepsilon}{\eta}\,.$$

Allo stesso modo si può ragionare quando, considerando $\displaystyle\int_{x_0(K\varepsilon)}^{x_0+h} |f(x)|\, dx$ come funzione di x_0 e di h, si determina l'aggregato $N_{\varepsilon\eta}$ dei punti di C_ε in cui

$$\overline{\lim_{h=0}}\, \frac{1}{h} \int_{x_0(K\varepsilon)}^{x_0+h} |f(x)|\, dx \geq \eta.$$

Chiamando ν la misura di tale aggregato, si otterrà quindi pure

$$\nu \leq \frac{\int_{K\varepsilon} |f(x)|\,dx}{\eta} \leq \frac{\varepsilon}{\eta}\,.$$

L'aggregato $C_\varepsilon - M_{\varepsilon\eta} - N_{\varepsilon\eta}$ avrà quindi misura

$$\geq c_\varepsilon - 2\frac{\varepsilon}{\eta} \geq b - a - \frac{\varepsilon}{\xi} - 2\frac{\varepsilon}{\eta} - \varepsilon\,.$$

Dopo ciò, si supponga che il punto x_0 appartenga a $C_\varepsilon - M_{\varepsilon\eta} - N_{\varepsilon\eta}$; sarà per esso

$$\overline{\lim_{h=0}} \left| \frac{1}{h} \int_{x_0\,(D\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\,dx \right| < \eta \quad , \quad \overline{\lim_{h=0}} \left| \frac{1}{h} \int_{x_0\,(K\varepsilon)}^{x_0+h} f(x)\,dx \right| \leq \overline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0\,(K\varepsilon)}^{x_0+h} |f(x)|\,dx < \eta$$

e quindi, per la (1),

$$\begin{aligned}(2)\qquad & \underline{\lim}_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x_0\,(C\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\,dx - 2\eta \leq \underline{\lim}_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \leq \\ & \leq \overline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \leq \overline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0\,(C\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\,dx + 2\eta\,.\end{aligned}$$

Ma, a causa della continuità di $f_\varepsilon(x)$ in C_ε, assegnato un θ arbitrario, si può determinare per ogni punto x_0 di C_ε un $h_\theta > 0$ tale che, per ogni $h \leq h_\theta$ e per ogni x di C_ε appartenente all'intervallo $x_0 \ldots x_0 + h$, sia $f_\varepsilon(x_0) - \theta \leq f_\varepsilon(x) \leq f_\varepsilon(x_0) + \theta$ e quindi

$$[f_\varepsilon(x_0) - \theta]\,\gamma_\varepsilon(x_0\,,h) \leq \int_{x_0\,(C\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\,dx \leq [f_\varepsilon(x_0) + \theta]\,\gamma_\varepsilon(x_0\,,h)\,.$$

La (2) dà quindi

$$\begin{aligned}(3)\qquad & \left(\underline{\lim}_{h=0} \frac{\gamma_\varepsilon(x_0\,,h)}{h}\right)(f_\varepsilon(x_0) - \theta) - 2\eta \leq \underline{\lim}_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \leq \\ & \leq \overline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \leq \left(\overline{\lim_{h=0}} \frac{\gamma_\varepsilon(x_0\,,h)}{h}\right)(f_\varepsilon(x) + \theta) + 2\eta\,.\end{aligned}$$

Per valutare i due limiti di $\frac{\gamma_\varepsilon}{h}$ si tenga presente la relazione

$$\gamma_\varepsilon + \delta_\varepsilon + \varkappa_\varepsilon = h\,;$$

si osservi inoltre che, dalla relazione

$$\overline{\lim_{h=0}}\, \frac{\xi\delta_\varepsilon}{h} < \eta \quad \text{segue} \quad \overline{\lim_{h=0}}\, \frac{\delta_\varepsilon}{h} < \frac{\eta}{\xi}\,,$$

e poichè in K_ε è sempre $|f(x)| > \xi$, dalla

$$\overline{\lim_{h=0}}\, \frac{1}{h} \int_{x_0\,(K\varepsilon)}^{x_0+h} |f(x)|\, dx < \eta \quad \text{segue} \quad \overline{\lim_{h=0}}\, \frac{\varkappa_\varepsilon}{h} < \frac{\eta}{\xi}\,.$$

Risulta

$$\overline{\lim_{h=0}}\, \frac{\gamma_\varepsilon}{h} = 1 \quad , \quad \underline{\lim}_{h=0}\, \frac{\gamma_\varepsilon}{h} \geq 1 - \overline{\lim_{h=0}}\, \frac{\delta_\varepsilon + \varkappa_\varepsilon}{h} > 1 - \frac{2\eta}{\xi}\,.$$

Dunque infine, osservando ancora che $f_\varepsilon(x_0) = f(x_0)$ e che θ si può assumere arbitrariamente piccolo, la (3) diviene

$$f(x_0) - \frac{2\eta}{\xi} f(x_0) - 2\eta \leq \underline{\lim}_{h=0}\, \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq \overline{\lim_{h=0}}\, \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq f(x_0) + 2\eta$$

ovvero, poichè $|f(x_0)| \leq \xi$,

$$(4) \qquad f(x_0) - 4\eta \leq \underline{\lim}_{h=0}\, \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq \overline{\lim_{h=0}}\, \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq f(x) + 2\eta\,.$$

Si scelga ora $\eta = \sqrt{\varepsilon}$: facendo tendere ε a 0, i due membri estremi della disuguaglianza tendono al medesimo limite $f(x_0)$, onde potremo concludere che, *se il punto x_0 è tale che, per i valori di ε di una conveniente successione tendente a 0, esso è costantemente contenuto in $C_\varepsilon - M_{\varepsilon\eta} - N_{\varepsilon\eta}$, in tal punto x_0 la funzione $\Phi(x) = \int_a^x f(x)\, dx$ ha derivata a destra, e precisamente uguale a $f(x_0)$.*

Ma, per la scelta fatta di η, la misura di $C_\varepsilon - M_{\varepsilon\eta} - N_{\varepsilon\eta}$ è

$$\geq (b - a) - 2\sqrt{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\xi} - \varepsilon$$

e quindi, tosto che ξ è sufficientemente grande ed ε sufficientemente piccolo,

$$\geq (b - a) - 3\sqrt{\varepsilon}\,.$$

Si consideri quindi una successione di numeri

$$\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \quad (\lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0)$$

tale che la serie $\sum \sqrt{\varepsilon_i}$ sia convergente: la misura dell'aggregato comune a tutti i $C_{\varepsilon_j} - M_{\varepsilon_j\eta_j} - N_{\varepsilon_j\eta_j}$ per $j \geq i$ è $\geq (b - a) - 3 \sum_{j=i}^{j=\infty} \sqrt{\varepsilon_j}$ e tende quindi a $b-a$ col tendere di i a ∞: *si può quindi assegnare nell'intervallo* $a \dots b$ *un aggregato* E *di misura nulla tale che, tosto che* x_0 *non appartiene ad* E, *è soddisfatta la condizione precedentemente enunciata per cui si può affermare l'esistenza della derivata a destra di* $\Phi(x)$ *in* x_0 *e la sua uguaglianza a* $f(x)$. Tale aggregato E è il complementare di

$$\lim_{i=\infty} \prod_{j=i}^{j=\infty} (C_{\varepsilon_j \eta_j} - M_{\varepsilon_j \eta_j} - N_{\varepsilon_j \eta_j})\ (^1)$$

od anche l'aggregato, contenuto in questo, complementare di

$$\lim_{i=\infty} \sum_{j=i}^{j=\infty} (C_{\varepsilon_j} - M_{\varepsilon_j \eta_j} - N_{\varepsilon_j \eta_j}) .$$

Non altrimenti si ragionerà per le derivate a sinistra.

2. Veniamo ora a stabilire il teorema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni a numeri derivati non limitati:

Se l'aggregato dei valori della funzione $f(x)$ *in un qualunque aggregato di punti di misura nulla contenuto in* $a \dots b$ *ha misura nulla, e se ha misura nulla l'aggregato dei punti in cui qualcuna delle funzioni dei numeri derivati di* $f(x)$ *può divenire infinita,*

se inoltre esiste l'integrale del Lebesgue esteso all'intervallo $a \dots b$ [2] *di una delle dette funzioni derivate* (per es. della funzione $\overline{u}(x)$ derivata superiore a destra),

la funzione $f(x)$ *differisce al più per una costante dall'integrale indefinito di tal funzione derivata.*

Si ponga infatti

$$\Phi(x) = \int_a^x \overline{u}(x)\, dx .$$

Le due funzioni $f(x)$, $\Phi(x)$ si comportano come le funzioni $F(x)$, $\Phi(x)$ del n. 3 della Nota precedente. Infatti dalla proposizione del n. 1, per quanto riguarda la $\Phi(x)$, dalle ipotesi presenti, per la $f(x)$, risulta evidente che sono soddisfatte tutte le ipotesi di quella proposizione se appena si astrae da quella relativa ai valori della differenza $F(x) - \Phi(x)$. Riguardo a questa si osservi che, a causa della proposizione del n. prec., l'aggregato dei punti in cui $\Phi(x)$ può avere una derivata infinita ha misura nulla e che l'aggregato dei valori di una funzione integrale qualunque nei punti di un aggre-

(1) Indicando con $\Pi \mathfrak{A}_i$ l'aggregato comune a tutti gli aggregati $\mathfrak{A}_i$ (prodotto logico di essi aggregati) e analogamente, in seguito, con $\Sigma \mathfrak{A}_i$ la somma degli aggregati medesimi.

(2) E quindi ad ogni intervallo contenuto in $a \dots b$. Esistono funzioni derivate le quali non ammettono integrale del Lebesgue. Cfr. per un esempio: Lebesgue, Annali di matematica (3) 7, pag. 269-70.

gato di misura nulla ha misura nulla [1]; siccome quindi, per le ipotesi fatte, nell'aggregato di misura nulla in cui le derivate di $f(x)$ o di $\Phi(x)$ possono essere infinite, ciascuna delle due funzioni assume un aggregato di valori di misura nulla, un aggregato di valori di misura nulla assumerà pure in detti punti la differenza $f(x) - \Phi(x)$ [2].

3. Notevole corollario di questa proposizione è il seguente:

Se di una delle quattro funzioni derivate della funzione $f(x)$ (per es. della funzione $\overline{u}(x)$ derivata superiore a destra) *esiste l'integrale del Lebesgue esteso all'intervallo* $a \dots b$; *se inoltre le quattro funzioni dei numeri derivati della funzione* $f(x)$ *sono finite nell'intervallo* $a \dots b$, o più generalmente *se l'aggregato dei punti di* $a \dots b$ *in cui qualcuna delle funzioni dei numeri derivati di* $f(x)$ *può divenire infinita è riducibile, la funzione* $f(x)$ *differisce al più per una costante da* $\int_a^x \overline{u}(x)\, dx$ [3].

[1] È questa conseguenza immediata della definizione dell'integrale. Un aggregato di punti x di misura nulla si può racchiudere entro un aggregato S di segmenti di misura totale ε piccola a piacere: si spezzi l'integrale dei valori assoluti della funzione integrando in due parti: l'una relativa ai punti in cui la funzione integrando è in valore assoluto $> \xi$, l'altra relativa ai punti residui. La prima parte diviene piccola a piacere prendendo ξ sufficientemente grande; la seconda parte, considerata solo nei segmenti di S è $< \xi\varepsilon$ e quindi piccola a piacere per ε sufficientemente piccolo; dunque l'integrale dei valori assoluti, esteso a S è piccolo a piacere. Ora questo integrale è minore o uguale alla variazione totale dell'integrale dato nei segmenti di S, e quindi maggiore o uguale alla misura dei valori dell'integrale nei punti dell'aggregato considerato.

[2] Lo si vede facilmente osservando che l'aggregato dei valori considerati di $f(x)$ si può racchiudere in un aggregato numerabile di segmenti s_i di misura totale $< \varepsilon'$: si pensi allora numerato questo aggregato di segmenti e all'i-mo si faccia corrispondere un η_i tale che $\sum \eta_i < \varepsilon''$: si immagini ancora racchiuso l'aggregato dei valori considerati di $\Phi(x)$ in aggregati di segmenti di misure totali rispettivamente $< \eta_i$; i valori della differenza $f(x) - \Phi(x)$ per gli x considerati e per $f(x)$ in s_i, sono compresi fra i valori di $\lambda - \mu$ per λ in s_i e μ nel nominato aggregato di segmenti di misura $< \eta_i$. Si conclude facilmente che l'aggregato dei valori considerati per la differenza $f(x) - \Phi(x)$ ha misura $< \varepsilon' + \varepsilon''$.

[3] Per vero tosto che le funzioni dei numeri derivati sono finite, sono verificate le ipotesi del precedente enunciato; inquantochè, se l'aggregato dei valori della $f(x)$ in un aggregato $\mathfrak{A}$ di punti di misura nulla ha misura non nulla, esiste un aggregato di punti in cui almeno una derivata di $f(x)$ diviene infinita. Per provarlo basta ripetere un ragionamento analogo a quello del n. 1 della Nota precedente. Si racchiuda l'aggregato $\mathfrak{A}$ in un aggregato $S_{\varepsilon'}$ di segmenti di misura ε': se l'aggregato dei valori di $f(x)$ nei punti di $\mathfrak{A}$ ha misura $\geq v$, in uno almeno di questi segmenti è contenuto un segmento in cui il rapporto incrementale di $f(x)$ è $\geq \frac{v}{\varepsilon'}$, e dentro ad esso si può determinare similmente un segmento in cui il rapporto incrementale è $\geq \frac{v}{\varepsilon'\varepsilon''}$ e così via; scegliendo i numeri $\varepsilon', \varepsilon'' \dots < 1$ (e si possono prendere piccoli a piacere), si ottiene una serie di se-

Però la considerazione simultanea delle quattro derivate porta in queste proposizioni una complicazione superiore al necessario. Sulla riduzione delle ipotesi alla considerazione d'una derivata sola, quella che si integra, ritornerò ancora una volta.

4. L'identità, a meno d'una costante, delle funzioni $f(x)$ e $\Phi(x)$ ci permette di applicare alla prima le proprietà dimostrate per la seconda nel n. 1. Si può quindi affermare che:

Se una funzione è tale che l'aggregato dei valori di essa in ogni aggregato di misura nulla abbia misura nulla, che l'aggregato dei punti in cui qualcuna delle sue funzioni derivate può essere infinita abbia misura nulla; tale infine che una qualunque di queste funzioni derivate ammetta l'integrale del Lebesgue esteso all'intervallo a ... b, tal funzione ha derivata determinata e finita in tutti i punti dell'intervallo a ... b, tolto al più un aggregato di punti di misura nulla.

Applicando questa osservazione alla proposizione del n. 3 della Nota precedente si vede che si possono in essa alterare alcun poco le ipotesi e dire che:

Si potrà affermare che due funzioni continue $F(x)$ *e* $\Phi(x)$ *non possono differire in un intervallo a ... b che per una costante tosto che si sappia che le due funzioni hanno una coppia di derivate omonime uguali in tutti i punti dell'intervallo, fatta astrazione dai punti di un aggregato di misura nulla, e che inoltre le due funzioni hanno finite le derivate in tutti i punti dell'intervallo, tolti al più i punti di un aggregato di misura nulla, purchè ciascuna delle due funzioni o più generalmente la loro differenza assuma in ogni aggregato di punti di misura nulla un aggregato di valori di misura nulla.*

5. Terminerò questa Nota con alcune considerazioni sul problema delle funzioni primitive che hanno derivata determinata in tutti i punti. A queste funzioni si applicano intanto le proposizioni precedenti: *Ogni funzione avente derivata determinata e finita in tutti i punti dell'intervallo a ... b ed integrabile in tale intervallo è uguale — a meno d'una costante — all'inte-*

---

gmenti contenuti ciascuno nel precedente e che ha per limite un punto in cui almeno una derivata è infinita.

È chiaro che: 1° l'aggregato $\mathfrak{A}$ non è numerabile, perchè sarebbe numerabile e quindi di misura nulla l'aggregato dei valori corrispondenti di $f(x)$; 2° l'aggregato $\mathfrak{A}$ è contenuto in ogni derivato dell'aggregato dei punti in cui una derivata è infinita, od almeno si possono da esso sopprimere senza danno i punti che non appartengono a questo derivato, perchè l'aggregato dei valori di $f(x)$ in essi ha misura nulla. Quindi se in un aggregato di punti di misura nulla l'aggregato dei valori della funzione ha misura non nulla, l'aggregato dei punti in cui una derivata di $f(x)$ è infinita non può essere riducibile.

grale indefinito della propria derivata (1). Quando poi la derivata della funzione possa divenire infinita, la proposizione resterà pur vera purchè l'aggregato dei valori della funzione in ogni aggregato di punti di misura nulla abbia misura nulla. Quando questa condizione non fosse soddisfatta, la proposizione non potrebbe sussistere perchè, come si osservò poc'anzi, una funzione integrale non può assumere un aggregato di valori di misura non nulla in un aggregato di punti di misura nulla. Ciononostante si può dimostrare che il problema delle funzioni primitive è ancora perfettamente determinato: *se* cioè *una funzione ha derivata unica e determinata in tutti i punti d'un intervallo, la funzione medesima è determinata nell'intervallo, a meno d'una costante, dai valori della sua derivata in un aggregato di punti dell'intervallo, il cui aggregato complementare abbia misura nulla* (2).

6. Per mostrarlo osserveremo anzitutto che:

Se una funzione ha derivata unica e determinata in tutti i punti di un intervallo $a \dots b$ *e se tal derivata è nulla od infinita in tutti i punti che non appartengono ad un aggregato di misura nulla, la derivata medesima è nulla in tutto l'intervallo e la funzione si riduce quindi ad una costante.*

Nelle presenti ipotesi esistono infatti in ogni segmento punti in cui la derivata è nulla o infinita; ma la derivata non può allora essere costantemente d'uno stesso segno (non nulla) in tutti i punti di un segmento, perchè una funzione monotona non può avere derivata infinita in tutti i punti di un aggregato di misura $\mu > o$ (3); e, per un noto teorema del sig. Dar-

(1) Quando la derivata è integrabile nel senso di Riemann-Cauchy, la proposizione è nota (cfr. Schoenflies, *Bericht. ü. Mengenlehre*, pag. 213).

(2) Questa proposizione può essere confrontata, almeno nei termini in cui è espressa, con altre note, per es. la seguente dovuta al Volterra (V. *Sui principi del calcolo integrale*, Giornale di Battaglini, 19, pag. 333) « Se la derivata di una funzione si conosce « in tutti i punti di un intervallo esclusi quelli appartenenti ad un gruppo di punti ed « ai suoi punti limiti, la condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa determinare « la funzione primitiva (conoscendone il valore in un punto) è che il gruppo sia rinchiu- « dibile in intervalli arbitrariamente piccoli ». Qui si osservi però che il Volterra ammette implicitamente di ragionar sempre sopra funzioni finite; nella proposizione in questione la derivata medesima della funzione incognita deve supporsi finita. Una notevole divergenza si mostra inoltre fra la proposizione citata e quella del testo, in quanto la prima enuncia come condizione *necessaria* una che non è affatto rispettata nell'enunciato del testo. Di ciò deve ricercarsi la ragione nella condizione che il Volterra viene ad imporre all'aggregato eccezionale di essere chiuso ed in qualche dubbio che può nascere su ciò che le funzioni che si offrono come esempio, diverse fra loro ed aventi la stessa derivata fuori del gruppo eccezionale, possano non aver derivata nei punti di questo gruppo eccezionale. Invero, se si abbandona l'ipotesi che il gruppo eccezionale sia chiuso, si troverà che una proposizione in contraddizione coll'enunciata necessità, fu dimostrata dallo Scheeffer fin dal 1885 (Acta Mathematica, vol. 5, pag. 282).

(3) Altrimenti, scelto arbitrariamente un ε e un $\mu_1 < \mu$, prossimo quanto si vuole a μ, esisterebbe un χ tale che l'aggregato dei punti x in cui il rapporto incrementale della funzione nell'intervallo $x \dots x+h$, per ogni $h \leq \chi$ è $\geq \frac{1}{\varepsilon}$ ha misura $> \mu_1$;

boux [1] in ogni segmento in cui la derivata abbia valori di segno contrario, esistono punti in cui la derivata è nulla: in ogni intervallo esistono dunque punti in cui la derivata è nulla.

Si aggiunga a questa osservazione il fatto che la derivata (supposta unica e determinata in ogni punto di $a \ldots b$) costituisce una funzione di 1ª classe del Baire e quindi rispetto ad ogni aggregato chiuso di valori della variabile possiede punti di continuità in ogni intervallo [2]; segue che in ogni intervallo esisteranno segmenti in cui essa derivata resta piccola a piacere. In un tal segmento non esisteranno punti in cui la derivata sia infinita: quindi (pei n. 1, 2 della mia Nota precedente) la funzione sarà costante in esso e la derivata vi sarà ovunque nulla. Negli estremi di tal segmento la derivata sarà ancora nulla: infatti, per la già citata proposizione del sig. Darboux fra due punti in cui la derivata assuma valori diversi, ne esistono di quelli in cui la derivata assume valori intermedi; si conclude che non potrebbe la derivata esser $\neq 0$ negli estremi del segmento senza esser $\neq 0$ in qualche punto del segmento medesimo. L'aggregato dei punti in cui la derivata può esser $\neq 0$ deve dunque esser *contenuto* nell'aggregato non denso — perfetto — complementare a un aggregato di segmenti (e non può contenere gli estremi di questi segmenti). E si deve supporre che in questo aggregato esso sia denso, perchè ogni segmento in cui non esistano punti a derivata $\neq 0$ si può pensare previamente soppresso dall'aggregato. In ogni segmento contenente punti di questo aggregato perfetto, son pure contenuti punti in cui la derivata è nulla e che appartengono ad esso aggregato (gli estremi dei segmenti complementari); quindi, per la ricordata proprietà delle funzioni di 1ª classe, esisterà in esso un segmento contenente punti dell'aggregato medesimo ed in cui la derivata resta piccola quanto si vuole; e riapplicando la proposizione già ricordata (Nota precedente n. 1, 2) tale derivata sarà ancora nulla in tutti i punti del nominato aggregato perfetto, contenuti in tal segmento. Ora questa conclusione contraddice alla definizione di quell'aggregato. Ne segue la non esistenza dell'aggregato medesimo.

7. Segue dalla proposizione ora dimostrata che se due funzioni hanno derivata in tutti i punti dell'intervallo $a \ldots b$, e, se si astrae da un aggregato di misura nulla, vi hanno precisamente la stessa derivata, la loro diffe-

---

questo aggregato è chiuso, e ripetendo per esso un ragionamento analogo a quello fatto nel n. 1 per l'aggregato è chiuso $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ e nel n. 1 della Nota precedente per l'aggregato B, si concluderebbe che si può determinare un aggregato di segmenti contenuto in $a \ldots b$ in cui l'incremento della funzione è $> \frac{\mu_1}{\varepsilon}$ e cioè grande a piacere.

(1) Cfr. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* etc. pag. 89. Dini, *Fondamenti per una teoria delle funzioni di variabile reale*, n. 172.

(2) Baire, *Thèse, Sur les fonctions de variables réelles*, pag. 30 (Annali di Matematica, 1899).

renza — la quale in tutti i punti di $a \dots b$ ha derivata, e precisamente derivata nulla o infinita, se si astrae dal nominato aggregato — deve ridursi ad una costante onde risulta la proposizione enunciata alla fine del n. 4.

Si può ancora rilevare che una funzione la quale abbia derivata in tutti i punti di un intervallo e precisamente derivata nulla nell'aggregato complementare di un aggregato di misura nulla, dovendo essere costante, non differirà dall'integrale della propria derivata; fatto notevole se si osserva che appunto per esemplificare i casi d'eccezione al teorema fondamentale del calcolo integrale furono immaginate le funzioni continue costanti a tratti, per cui l'integrale della derivata è nullo senza che sia costante la funzione (1): tali funzioni non hanno derivata determinata in tutti i punti dell'intervallo e non possono quindi illuminare il problema nelle presenti ipotesi.

Matematica. — *Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari.* Nota di Ettore Bortolotti, presentata dal Corrispondente E. Cesàro.

Se si indica con r_n il numero degli elementi di una data classe C, che sono compresi fra i primi n della successione $u_1, u_2, \dots u_n, \dots$, *la probabilità, per un termine preso a caso fra i primi n di quella successione, di appartenere alla classe* C, *è espressa dal rapporto* $\frac{r_n}{n}$, ed *il limite, per* $n = \infty$, *di cotesto rapporto, rappresenta la frequenza degli elementi di classe* C, *nella successione* u_n.

I concetti di probabilità e di frequenza possono estendersi ad insiemi $[\xi]$, lineari non numerabili; intendendo per PROBABILITÀ *dei punti* $[\xi]$ *nell'intervallo* $x \urcorner X$, *il rapporto della estensione esteriore della parte di* $[\xi]$ *contenuta in* $x \urcorner X$, *alla lunghezza* $X - x$; e per FREQUENZA *dei punti* $[\xi]$ *in* a (*a punto a distanza finita*, od a punto dell'infinito), *il limite delle probabilità, che i punti* $[\xi]$ *hanno in intorni di* a, *i cui estremi si accostino indefinitamente ad* a.

La frequenza viene, in qualche modo, ad indicarci il grado di condensazione dei punti $[\xi]$ intorno ad a; e pare intuitivo l'ammettere, che se ai punti dell'intorno $x \urcorner X$, dove l'insieme $[\xi]$ è dato ed il punto a è contenuto, si fanno corrispondere quelli del segmento $y(x) \urcorner y(X)$, mediante una operazione $y = f(x)$, espressa da una funzione sempre crescente insieme con la sua derivata; nella corrispondenza biunivoca ordinata, continua, che così si stabilisce, la frequenza sia un elemento invariante.

(1) V. Harnack, Math. Ann. 24; Schoenflies, l. c. pag. 166 e seg.