ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

renza — la quale in tutti i punti di $a \ldots b$ ha derivata, e precisamente derivata nulla o infinita, se si astrae dal nominato aggregato — deve ridursi ad una costante onde risulta la proposizione enunciata alla fine del n. 4.

Si può ancora rilevare che una funzione la quale abbia derivata in tutti i punti di un intervallo e precisamente derivata nulla nell'aggregato complementare di un aggregato di misura nulla, dovendo essere costante, non differirà dall'integrale della propria derivata; fatto notevole se si osserva che appunto per esemplificare i casi d'eccezione al teorema fondamentale del calcolo integrale furono immaginate le funzioni continue costanti a tratti, per cui l'integrale della derivata è nullo senza che sia costante la funzione [1]: tali funzioni non hanno derivata determinata in tutti i punti dell'intervallo e non possono quindi illuminare il problema nelle presenti ipotesi.

Matematica. — *Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari.* Nota di Ettore Bortolotti, presentata dal Corrispondente E. Cesàro.

Se si indica con r_n il numero degli elementi di una data classe C, che sono compresi fra i primi n della successione $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$, *la probabilità, per un termine preso a caso fra i primi n di quella successione, di appartenere alla classe* C, *è espressa dal rapporto* $\frac{r_n}{n}$, ed *il limite, per* $n = \infty$, *di cotesto rapporto, rappresenta la frequenza degli elementi di classe* C, *nella successione* u_n.

I concetti di probabilità e di frequenza possono estendersi ad insiemi $[\xi]$, lineari non numerabili; intendendo per PROBABILITÀ *dei punti* $[\xi]$ *nell'intervallo* $x \vdash X$, *il rapporto della estensione esteriore della parte di* $[\xi]$ *contenuta in* $x \vdash X$, *alla lunghezza* $X - x$; e per FREQUENZA *dei punti* $[\xi]$ *in* a (*a punto a distanza finita*, od a punto dell'infinito), *il limite delle probabilità, che i punti* $[\xi]$ *hanno in intorni di* a, *i cui estremi si accostino indefinitamente ad* a.

La frequenza viene, in qualche modo, ad indicarci il grado di condensazione dei punti $[\xi]$ intorno ad a; e pare intuitivo l'ammettere, che se ai punti dell'intorno $x \vdash X$, dove l'insieme $[\xi]$ è dato ed il punto a è contenuto, si fanno corrispondere quelli del segmento $y(x) \vdash y(X)$, mediante una operazione $y = f(x)$, espressa da una funzione sempre crescente insieme con la sua derivata; nella corrispondenza biunivoca ordinata, continua, che così si stabilisce, la frequenza sia un elemento invariante.

[1] V. Harnack, Math. Ann. 24; Schoenflies, l. c. pag. 166 e seg.

Ho verificato invece, che questa invarianza non sempre si verifica; ma dipende dalle rapidità con cui la $y(x)$ tende ad $y(a)$, mentre x tende ad a.

Più precisamente: essa ha luogo per tutte le trasformazioni che si operano mediante funzioni $y(x)$, nelle quali la rapidità della tendenza al limite $y(a)$, non è superiore a quella che può essere rappresentata con potenze reali $(x-a)^m$, della differenza $x-a$; ma che, per funzioni le quali tendono al limite con rapidità maggiore di quelle esprimibili in cotesta forma, la frequenza non può dirsi invariante, se non si impongono speciali limitazioni circa la definizione degli insiemi $[\xi]$ considerati.

Questa Nota fa seguito alla Nota *Sopra una ricerca di limite* stampata in questi Rendiconti, e non ha la pretesa di trattare in modo esauriente l'argomento, difficile, e, credo, importante; ma di dare notizia dei risultamenti ottenuti e del metodo seguito per questi studî; non tentati, che io mi sappia, da altri, ed accennati appena in poche righe di una mia Nota precedente [1].

Uno sviluppo più completo dovrà trovarsi in una memoria, che fa parte di una serie di studî sulla *convergenza di algoritmi infiniti*, nel volume in corso di stampa degli Atti della Accademia di Scienze in Modena.

1. Indichiamo con $[\xi]$ un insieme di numeri reali comunque definiti, e con $S(x, X)$, la estensione esteriore della parte di questo insieme contenuta nel segmento $x \urcorner X$.

2. *Frequenza dell' insieme* $[\xi]$ *nel punto dell' infinito*, è il limite (quando esiste)

$$(1) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{X=\infty} \dfrac{S(x, X)}{X-x} \\ x \text{ finito, costante.} \end{cases}$$

3. *Frequenza dell'insieme* $[\xi]$ *nel punto* a a distanza finita, è il limite (quando esiste)

$$(2) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x=a \\ X=a}} \dfrac{S(x, X)}{X-x}, \\ X-x > 0 \ , \ x \leqq a \leqq X. \end{cases}$$

4. Per $x = a$, si ha *la frequenza a destra*, per $X = a$, *la frequenza a sinistra di* a.

[1] Cfr. questi Rendiconti, vol. XI, 2° sem., 1902, fasc. 2°: *Contributo alla teoria degli insiemi.*

5. Sia x_n una successione soddisfacente le condizioni [1]

$$x_0 = x \qquad x_n - x_{n-1} > 0\,,$$

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} x_n = a\,, \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{a - x_{n-1}} = 0 \quad (a \text{ finito}); \\ \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x} = 0 \quad (a = \infty); \end{cases}$$

la frequenza a sinistra nel punto a a distanza finita si potrà calcolare cercando il limite

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{S(x_n\,,a)}{a - x_n} = \lim_{n=\infty} \frac{S(x_n\,,x_{n+1}) + S(x_{n+1}\,,x_{n+2}) + \cdots}{(x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + \cdots}\,,$$

e quella nel punto dell'infinito, cercando il limite

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{S(x_0\,,x_n)}{x_n - x_0} = \lim_{n=\infty} \frac{S(x_0\,,x_1) + S(x_1\,,x_2) + \cdots + S(x_{n-1}\,,x_n)}{(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})}\,.$$

6. Se noi ora supponiamo che la variabile

$$\beta_n = a - x_n\,,$$

abbia ordine finito di infinitesimo; osservando che

$$\Delta\beta_n = x_{n-1} - x_n\,,$$

ed applicando il teorema 2° (v. anche l'enunciato del teor. 3°) della mia Nota: *Sopra una ricerca di limite*, avremo dalla formola (4), che *se esiste il limite*

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{S(x_0\,,x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{S(x_1\,,x_2)}{x_2 - x_1} + \cdots + \frac{S(x_{n-1}\,,x_n)}{x_n - x_{n-1}} \right\},$$

questo ci dà la frequenza dell'insieme dato nel punto a [2].

7. Similmente, se la variabile

$$B_n = x_n - x_0$$

è infinita di ordine finito, dalla (5) si deduce che, *quando esiste il limite*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{S(x_0\,,x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{S(x_1\,,x_2)}{x_2 - x_1} + \cdots + \frac{S(x_{n-1}\,,x_n)}{x_n - x_{n-1}} \right\},$$

[1] La condizione $\dfrac{\Delta\varphi_n}{\varphi_n} = 0$, che noi richiediamo per la successione $\varphi_n = a - x_n$ (per a, finito, $\varphi_n = x_n$, per a infinito), è soddisfatta da tutte le variabili monotone φ_n, che decrescono meno rapidamente di $e^{-\varepsilon n}$, o che crescono meno rapidamente di $e^{\varepsilon n}$ (cfr. Bortolotti, *Sul limite del quoziente di due funzioni*, Ann. di Mat. t. VIII, serie III, pag. 273 e seguenti.

[2] Intendiamo *la frequenza a sinistra*, altrettanto può dirsi per *la frequenza a destra*; per *punti a distanza finita noi ci limiteremo, in seguito, a considerare la frequenza a sinistra.*

questo ci dà l'espressione della frequenza del dato insieme, nel punto dell'infinito. Se la variabile $B_n = x_n - x_0$, *è infinita del primo ordine il limite* (6) *esiste sempre in tutti i casi in cui esiste il limite* (5), *cioè in cui è determinata la frequenza che l'insieme dato ha nel punto dell'infinito* [1].

8. Riassumendo si ha il teorema:

Se la successione sempre crescente x_n *tende al punto* a (all'infinito) *e le differenze* $a - x_n$ $(x_n - x_0)$, *sono per* $n = \infty$, *infinitesime* (*infinite*) *di ordine finito, la frequenza dell'insieme* $[\xi]$ *nel punto* a *è espressa dal limite* (*se esiste*) *per* $n = \infty$ *della media delle probabilità, che i punti* $[\xi]$, *hanno, rispettivamente, negli intervalli* $x_0 \urcorner x_1$, $x_1 \urcorner x_2$, ... $x_{n-1} \urcorner x_n$, *determinati dai punti della successione* x_n.

Questo limite sicuramente esiste, se l'insieme dato ha, nel punto $x_n = \infty$, *frequenza determinata, e se la successione* $x_n - x_0$ *è infinita del primo ordine per* $n = \infty$.

9. Sia $\varphi(x)$ la *indicatrice di frequenza* [2] dei punti $[\xi]$.

La estensione esteriore della parte di $[\xi]$ contenuta nel segmento $x \urcorner X$, sarà data dall'integrale definito:

$$S(x, X) = \int_x^X \varphi(x)\, dx. \tag{7}$$

10. Se, mediante la funzione continua, derivabile, sempre crescente o sempre decrescente $y(x)$, si fanno corrispondere ai punti del segmento $x \urcorner X$, quelli del segmento $y(x) \urcorner y(X)$; all'insieme $[\xi]$ corrisponderà un insieme $[\eta]$, la cui estensione esteriore sarà parimenti espressa dalla formola

$$\begin{cases} \mathcal{S}(y(x), y(X)) = \displaystyle\int_y^Y \Phi(y)\, dy, \\ y = y(x) \quad Y = y(X); \\ \Phi(y) \text{ indicatrice di frequenza dell'insieme} \\ [\eta = y(\xi)]; \end{cases} \tag{8}$$

o dall'altra equivalente:

$$\mathcal{S}(y, Y) = \int_x^X \varphi(x) \,.\, y'(x)\, dx; \tag{9}$$

e se supponiamo la y' continua nel tratto $x \urcorner X$, avremo la relazione

$$\begin{cases} \mathcal{S}(y, Y) = y'(x + \theta(X - x))\, S(x, X) \\ 0 < \theta < 1. \end{cases} \tag{10}$$

[1] Cfr. la Nota: *Sopra una ricerca di limite*, al teorema 1°.

[2] Si prenda cioè $\varphi[\xi] = 1$, $\varphi(x) = 0$, per $x \neq \xi$. Cfr. Cesàro, *Sull'uso della integrazione in alcune questioni di Aritmetica*. Rendiconti Circ. Mat. di Palermo t. I, pag. 293 e seguenti.

11. Teorema. *Sia $y(x)$ una funzione reale della variabile reale x, infinita di ordine finito per $x = \infty$, monotona, insieme con la sua derivata $y'(x)$, in tutti i punti a distanza finita di un determinato intorno $x_0 \vdash \infty$ dell'infinito; la quale trasformi biunivocamente i punti del raggio $x_0 \vdash \infty$, in quelli del raggio $y_0 \vdash \infty$.*

Ad ogni insieme $[\xi]$, di punti x, con frequenza determinata nel punto dell'infinito, corrisponde un insieme $[\eta = y(\xi)]$, di eguale frequenza.

Preso ad arbitrio il numero positivo h, si costruisca la successione

$$x_n = x_0 + nh. \tag{11}$$

Ponendo

$$y_n = y(x_n), \tag{12}$$

dalla formola (10) ricaviamo

$$\frac{\mathcal{S}(y_{n-1}, y_n)}{h \cdot y'(x_{n-1} + \theta_{n-1} h)} = \frac{\mathrm{S}(x_{n-1}, x_n)}{h} = \frac{\mathrm{S}(x_{n-1}, x_n)}{x_n - x_{n-1}},$$

e, per la applicazione del teorema sui limiti già ricordato [1],

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{S}(y_{i-1}, y_i)}{\sum_{i=1}^{n} h \cdot y'(x_{i-1} + \theta_{i-1} h)} = \lim_{n=\infty} \frac{\mathcal{S}(y_0, y_n)}{\sum_{1}^{n} h \cdot y'(x_{i-1} + \theta_{i-1} h)} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{\mathrm{S}(x_{i-1}, x_i)}{x_i - x_{i-1}}.$$

Ma il secondo membro rappresenta la frequenza dell'insieme $[\xi]$ nel punto dell'infinito; indicando tale frequenza con ω, avremo dunque:

$$\omega = \lim_{n=\infty} \frac{\mathcal{S}(y_0, y_n)}{\sum_{1}^{n} h y'(x_{i-1} + \theta_{i-1} h)}.$$

D'altro canto si ha

$$\sum_{1}^{n} h y'(x_{i+1} + \theta_{i-1} h) = y(x_n) - y(x_0) + \vartheta(y'(x_{n+1}) - y'(x_0))$$

$$-h < \vartheta < h;$$

ricordando che

$$\lim_{n=\infty} \frac{y'(x)}{y(x)} = 0,$$

[1] Questa applicazione è lecita perchè $\sum_{1}^{n} y'(x_n)$ è infinita di ordine finito; vediamo infatti, che si comporta assintoticamente come $y(x_n)$, ed essendo x_n infinito del primo ordine, $y(x_n)$ ha, rispetto alla n, lo stesso ordine che $y(x)$ ha per $x = \infty$.

abbiamo dunque:

$$\omega = \lim_{n=\infty} \frac{\mathcal{S}(y_0 , y_n)}{y_n - y_0} ;$$

e ciò, per quanto si è detto al n. 6, e per le ipotesi poste sulla crescenza della y, mostra appunto che *la frequenza dell'insieme* $[\eta = y(\xi)]$ *nel punto* $y = \infty$ *è determinata ed eguale ad* ω.

12. Volendo esaminare la possibilità di estendere il risultamento trovato a funzioni $y(x)$, crescenti più rapidamente di qualunque potenza reale x^a di x, (come sarebbero $x^{lg\, x}$, e^x, $x^x \cdots$); osservo anzitutto che, preso un numero positivo k arbitrario, la successione

$$y_n = y_0 + n k$$

corrisponde ad una successione x_n, determinata dalla relazione

$$y_n = y(x_n) ,$$

la quale cresce tanto più lentamente, quanto più rapida è la crescenza della $y(x)$.

Essendo y_n infinita del primo ordine, rispetto ad n, avremo la frequenza dell' insieme $[\eta = y(\xi)]$, cercando il limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{S}(y_{i-1} , y_i)}{y_i - y_{i-1}} ,$$

ma, per la (10),

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{S}(y_{i-1} , y_i)}{y_i - y_{i-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{S}(x_{i-1} , x_i)\, y'(x_{i-1} + \theta_{i-1} \Delta x_i)}{y_i - y_{i-1}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{S}(x_{i-1} , x_i)}{x'(y_{i-1} + \theta k)\,(y_i - y_{i-1})} .$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{S}(y_{i-1} , y_i)}{y_i - y_{i-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{S}(x_{i-1} , x_i)}{x_i - x_{i-1}} . \tag{11}$$

Se questo limite esiste, si ha:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{S}(x_{i-1} , x_i)}{x_i - x_{i+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{S}(x_0 , x_n)}{x_n - x_0} ;$$

perchè siamo in uno dei casi in cui il teorema sui limiti, più volte citato è valido; precisamente in quello noto da lungo tempo, di variabili $b_n = x_n - x_{n-1}$ positive infinitesime, e di variabili $\mathrm{B}_n = x_n - x_0$ infinite, per $n = \infty$.

Se dunque l'insieme $[\eta = y(\xi)]$ ha frequenza determinata nel punto dell'infinito, l'insieme dato $[\xi]$ ha la stessa frequenza; onde potremo dire, che *per effetto della trasformazione*

$$y = y(x) ,$$

quando la $y(x)$ abbia, per $x = \infty$, ordine *di infinito superiore a quello di qualunque potenza reale x^a della x, un insieme di data frequenza si trasforma in un insieme di eguale frequenza, o che non ha frequenza determinata, per $y = \infty$.*

13. Un esempio di insieme $[\xi]$ a frequenza nulla, cui, per la trasformazione $y = e^x$ corrisponde un insieme a frequenza non infinitesima, ci è dato dai punti contenuti nei segmenti

$$\begin{cases} a^{\neg} a + \dfrac{a}{\lg a}, \; a^{2\neg} a^2 + \left(\dfrac{a}{\lg a}\right)^2, \ldots, a^{n\neg} a^n + \left(\dfrac{a}{\lg a}\right)^n, \ldots, \\ a > e. \end{cases}$$

Subito si verifica, infatti, che il massimo limite del rapporto $\dfrac{S(x)}{x}$, è quello verso cui tende la successione

$$\frac{S\left(0, a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n\right)}{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n} = \frac{\frac{a}{\lg a} + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n}{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n},$$

e che questo è *zero*.

La corrispondente successione

$$\frac{S\left(1, e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n}\right)}{e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n} - 1} = \frac{\left(e^{a + \frac{a}{\lg a}} - e^a\right) + \cdots + \left(e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n} - e^{a^n}\right)}{e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n} - 1},$$

ha tutti i suoi termini maggiori di quelli della successione

$$\frac{e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n} - e^{a^n}}{e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n}} = 1 - \frac{1}{e^{\left(\frac{a}{\lg a}\right)^n}},$$

la quale tende al limite 1.

14. Un esempio di insiemi $[\xi]$ pei quali il limite (11) sicuramente esiste, qualunque sia la rapidità di crescenza della y, l'abbiamo quando *si ammetta la possibilità di far corrispondere ad ogni numero dato positivo ε, un numero x_ε tale, che*

$$x > x_\varepsilon \quad , \quad \frac{S(x_\varepsilon, x)}{x - x_\varepsilon} < \varepsilon,$$

Si ha allora:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{S(x_{i-1}, x_i)}{x_i - x_{i-1}} = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1}{n} \sum \dfrac{S(x_{i-1}, x_i)}{x_i - x_{i-1}} = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{S(x_0, x_n)}{x_n - x_0} = 0, \\ \text{ed anche (formule (11))}, \\ \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\delta(y_0\, y_n)}{y_n - y_0} = 0, \end{cases}$$

cioè, *l'insieme dato ed il suo trasformato hanno frequenza infinitesima.*

Questo caso è particolarmente interessante per lo studio della convergenza

15. Esistono teoremi analoghi per la frequenza in punti a distanza finita, e per operazioni che fanno corrispondere il punto dell'infinito a punti a distanza finita, o reciprocamente; le cui dimostrazioni, fondate sugli stessi principî di quelle superiormente esposte, si troveranno in una Memoria che presto sarà stampata negli Atti della R. Accademia di Scienze di Modena.

Fisica. — *Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane* (1). Nota del prof. Riccardo Arnò, presentata dal Socio G. Colombo.

In correlazione ai miei precedenti lavori sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane (2), ho stabilito una nuova ricerca sperimentale con lo scopo precipuo di studiare gli effetti di una corrente alternata di data intensità e frequenza sul ciclo di isteresi di un cilindro di acciaio sospeso in campi magnetici rotanti della stessa intensità, ma di frequenza diversa (3).

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di elettrotecnica del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano (Istituzione Carlo Erba).

(2) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem., 1904, pag. 272; Atti dell'Associazione elettrotecnica italiana (Comunicazione fatta alla sezione di Milano nella seduta del 25 maggio 1904); Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, 1905, serie 2, vol. XXXVIII, pag. 142; Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem., 1905, pag. 278; Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, 1905, serie 2, vol. XXXVIII, pag. 438; Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem., 1905, pag. 368; Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem., 1905, pag. 512; Atti dell'Associazione elettrotecnica italiana (Comunicazione fatta l'11 ottobre 1905 all'Assemblea Generale di Firenze); Società italiana di Fisica (Comunicazione fatta alla Riunione annuale del 1906 in Roma).

(3) Osservo che, per tenere conto della variazione della resistenza induttiva delle spirali induttrici destinate ad essere percorse dalle correnti alternate di frequenza diversa