ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 gennaio 1906.

F. D'Ovidio, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle differenze finite.* Nota del Corrispondente G. Peano.

A note formule di calcolo differenziale e integrale corrispondono altre formule per le differenze finite, utili nelle applicazioni pratiche, e che qui esporrò rapidamente.

1. Sia a un numero intero, positivo o negativo, n un numero naturale, e b un intero maggiore di $a+n$. Indichiamo con f una funzione reale dei numeri interi compresi fra a e b. Allora il valore fb è espresso mediante fa, le sue successive differenze fino all'ordine n, e dalle differenze di ordine $n+1$ di f, pei valori da a a $b-n-1$ della variabile, dalla formula

$$fb = \Sigma[\mathrm{C}(b-a, r)\, \Delta^r fa \,|\, r, 0 \cdots n] +$$
$$+ \Sigma[\mathrm{C}(b-x-1, n)\, \Delta^{n+1} fx \,|\, x, a \cdots (b-n-1)].$$

I simboli hanno il valore conforme al « Formulario Matematico » (vedasi tomo V, pp. 131, 134). Esiste qualche varietà nelle notazioni usate dagli Autori nel calcolo delle differenze finite.

Il primo sommatorio, a cui si ridurrebbe la formula per $b=a+n$, è l'espressione del valore della funzione mediante le successive differenze, quale fu data dal Mercator nel 1668. Il secondo termine ne esprime il resto.

Tutta la formula è analoga a quella di Taylor, col resto sotto forma di integrale definito.

2. Nelle stesse ipotesi, la differenza fra fb e la somma dei primi $n+1$ termini dello sviluppo di Mercator, cioè il resto di cui sopra si parla, è della forma $\mathrm{C}(b-a\,, n+1)$ moltiplicato per un valore medio fra quelli assunti da $\Delta^{n+1} fx$, per x intero compreso fra a e $b-n-1$.

Risponde alla formula di Taylor, col resto di Lagrange.

3. Avendo $a\,, b\,, f$ il significato precedente, e $b > a+1$, se x è un intero compreso fra a e b, allora la differenza fra fx, e

$$fa + (x-a)(fb-fa)/(b-a)\,,$$

funzione di primo grado che per $x=a$ ed $x=b$ assume i valori fa e fb, vale

$$(x-a)(x-b)/2$$

moltiplicato per un valore medio fra quelli assunti da $\Delta^2 fx$, variando x da a a $b-2$ (per valori interi).

È analogo al teorema di calcolo differenziale che esprime l'errore nell'interpolazione di primo grado mediante la derivata seconda (Formulario, pag. 290).

4. Nelle ipotesi 3, la somma dei valori di fx, quando x varia per valori interi da a a b, è per approssimazione eguale al loro numero $b-a+1$, moltiplicato per la media aritmetica dei due valori estremi. L'errore in questa approssimazione si può esprimere colle differenze seconde, e si ha:

$$\begin{aligned}\Sigma(f, a \cdots b) &= (b-a+1)(fa+fb)/2 - \\ &\quad - \Sigma[(x-a)(b-x)\,\Delta^2 f(x-1) \mid x, (a+1) \cdots (b-1)]\end{aligned}$$

analoga alla formula di calcolo, che esprime un integrale definito colla formula dei trapezî, più un resto sotto forma di integrale.

5. Il resto nell'approssimazione precedente è riduttibile alla forma: $-\mathrm{C}(b-a+1\,, 3) \times$ valore medio di $\Delta^2 fx$, quando x varia da a a $b-2$, diviso per 2.

Le formule precedenti si possono dimostrare come le corrispondenti di calcolo, con opportune variazioni. Mi sono occorse in calcoli su rendite vitalizie; e non mi fu dato di incontrarle nelle pubblicazioni ordinarie.