ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

richiese dai bovi allorchè il suo fornello era acceso soltanto tre quarti del lavoro che occorsegli quando il suo fornello era spento; ma il vantaggio prodotto dal riscaldamento del coltro diminuì assai col diminuire della umidità del terreno.

§ 16. In terreno argilloso, contenente il 17 per cento in peso di acqua spontaneamente evaporabile, un pocolino di untuosità distesa su tutta la superficie sfregante del coltro ha prodotto il risparmio di oltre un quarto del lavoro senza di essa occorso, a parità di volume di terreno coltrato. La piccola spesa per la poca untuosità produrrebbe anche diminuzione nel logoramento del coltro.

Cristallografia. — *La trasformazione delle coordinate dei cristalli.* Nota del Corrispondente C. Viola.

Il problema della trasformazione delle coordinate non trova spesso applicazione in cristallografia, perchè l'orientamento dei cristalli durante la misura e lo studio di centinaia di individui offre già da sè il sistema di coordinate più indicato. La trasformazione delle coordinate è nondimeno talvolta necessaria; ed è indispensabile quando si voglia aggruppare i cristalli delle varie simmetrie in una unica figura fondamentale (Grundgestalt). È noto che il problema della trasformazione delle coordinate è ormai esaurito in seguito a vari lavori originali, come quelli di A. T. Kupffer 1826, W. H. Miller 1839, C. Fr. Naumann 1856, Q. Sella 1857, Th. Liebisch 1881, R. Panebianco, G. La Valle ecc., e che perciò poco o nulla rimane a dirne di nuovo. Ma il presente problema è suscettibile di ricevere più luce e semplicità; ciò si vuol dimostrare in questa Nota.

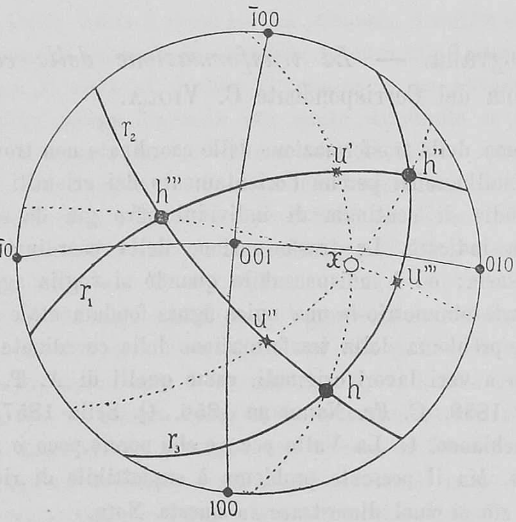
Sono date tre faccie del cristallo, figura annessa, che vogliamo denominare con h', h'', h''', i cui simboli nel vecchio sistema delle coordinate siano rispettivamente $(h'_1\, h'_2\, h'_3)$, $(h''_1\, h''_2\, h''_3)$, $(h'''_1\, h'''_2\, h'''_3)$. Con queste tre faccie sono date anche le tre zone r_1, r_2, r_3, le quali esse determinano; e cioè r_1 la zona della coppia di faccie $h''\, h'''$, r_2 della coppia $h'''\, h'$ ed r_3 della coppia $h'\, h''$. Siano $[r'_1\, r''_1\, r'''_1]$, $[r'_2\, r''_2\, r'''_2]$, $[r'_3\, r''_3\, r'''_3]$ i rispettivi simboli delle dette tre zone in rispetto al vecchio sistema delle coordinate, e determinati con le regole note.

Il problema di cui qui si tratta è questo: il vecchio sistema delle coordinate rispetto al quale si trova riferito il cristallo, ha da essere trasformato in un nuovo, le cui faccie fondamentali sono h', h'', h'''. Allora i nuovi assi del cristallo saranno quelli delle tre zone r_1, r_2, r_3, e le faccie del cristallo acquistano nuovi simboli. E, per esempio, quale simbolo riceverà nel nuovo sistema la faccia x, il cui simbolo nel vecchio sistema è dato ed è $(x_1\, x_2\, x_3)$?

Si osservi che chiamando con y_1, y_2, y_3 tre numeri, si può sempre esprimere i tre indici di una faccia qualsiasi x nel modo seguente, salvo un fattore di proporzionalità:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = y_1 h'_1 + y_2 h''_1 + y_3 h'''_1, \\ x_2 = y_1 h'_2 + y_2 h''_2 + y_3 h'''_2, \\ x_3 = y_1 h'_3 + y_2 h''_3 + y_3 h'''_3; \end{cases}$$

dove i tre numeri y_1, y_2, y_3 sono indipendenti dal sistema delle coordinate, che si assume. Questo si dimostra elementarmente con un tratto di penna.



Si moltiplichi le equazioni (1) successivamente per r'_1, r''_1, r'''_1 e si sommino; si avrà dopo questa operazione:

$$x_1 r'_1 + x_2 r''_1 + x_3 r'''_1 = y_1(h'_1 r'_1 + h'_2 r''_1 + h'_3 r'''_1),$$

osservando che

$$h''_1 r'_1 + h''_2 r''_1 + h''_3 r'''_1 = 0$$

e

$$h'''_1 r'_1 + h'''_2 r''_1 + h'''_3 r'''_1 = 0,$$

poichè le due faccie h'' e h''' sono nella zona r_1.

Si farà in seguito analoga operazione con i tre indici r'_2, r''_2, r'''_2 e poscia con gli indici r'_3, r''_3, r'''_3, e si otterranno ancora le due espressioni:

$$x_1 r'_2 + x_2 r''_2 + x_3 r'''_2 = y_2(h''_1 r'_2 + h''_2 r''_2 + h''_3 r'''_2),$$
$$x_1 r'_3 + x_2 r''_3 + x_3 r'''_3 = y_3(h'''_1 r'_3 + h'''_2 r''_3 + h'''_3 r'''_3).$$

Ma i tre trinomi

$$(2)\qquad \begin{cases} h'_1\, r'_1 + h'_2\, r''_1 + h'_3\, r'''_1 = \Delta_1, \\ h''_1\, r'_2 + h''_2\, r''_2 + h''_3\, r'''_2 = \Delta_2, \\ h'''_1\, r'_3 + h'''_2\, r''_3 + h'''_3\, r'''_3 = \Delta_3, \end{cases}$$

sono fra di loro eguali, epperò le tre espressioni precedenti si semplificano così:

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1 = x_1 r'_1 + x_2 r''_1 + x_3 r'''_1, \\ y_2 = x_1 r'_2 + x_2 r''_2 + x_3 r'''_2, \\ y_3 = x_1 r'_3 + x_2 r''_3 + x_3 r'''_3; \end{cases}$$

dalle quali si vede che dato x_1, x_2, x_3 e le tre faccie h', h'', h''', sono anche determinabili i tre numeri y_1, y_2, y_3, i quali introdotti nelle (1) dànno gli indici x_1, x_2, x_3. Ora ci rimane a dare la prova che questi tre numeri sono indipendenti dal sistema di coordinate che si assume. A tale uopo si scrivano le equazioni (1) nella forma:

$$(1)_a\qquad \begin{cases} x_1 - y_1 h'_1 = y_2 h''_1 + y_3 h'''_1 = u'_1, \\ x_2 - y_1 h'_2 = y_2 h''_2 + y_3 h'''_2 = u'_2, \\ x_3 - y_1 h'_3 = y_2 h''_3 + y_3 h'''_3 = u'_3. \end{cases}$$

È evidente che (u'_1, u'_2, u'_3) è il simbolo di una faccia u', vedi (figura annessa), la quale è comune alla zona $h''\, h'''$ e alla zona $x\, h'$. Ed è noto che se una faccia trovasi in una zona, i due numeri che la determinano, qui y_2 e y_3, ovvero 1 e $-y_1$, sono indipendenti dal sistema delle coordinate che si assume. Dunque risulta che la faccia u' trovantesi nella zona r_1 data dalla coppia $h''\, h'''$, determina con la faccia h' una zona, per la quale passa anche la faccia x; e i numeri y_2 e y_3 che fissano la posizione di questa faccia u', sono indipendenti dal sistema delle coordinate che si assume.

Nella medesima maniera si troverà una faccia u'' la quale è contenuta nella zona r_2 data dalla coppia $h'''\, h'$, e determina nella faccia h'' una zona, per la quale passa la faccia x; e qui pure i due numeri y_3, y_1 che fissano la posizione di questa faccia u'', sono indipendenti dal sistema delle coordinate che si assume, ecc. Epperò è definitivamente dimostrato che i tre numeri y_1, y_2, y_3 dell' equazioni (1) sono indipendenti dal sistema delle coordinate, che si assume.

Dimostrato ciò, sarà lecito cambiare il sistema delle coordinate, senza cambiare i numeri y_1, y_2, y_3 nelle equazioni (1). Per avvicinarci al nostro problema, si eseguisca il cambiamento delle coordinate in guisa che i simboli delle faccie h', h'', h''' divengano rispettivamente (100), (010), (001), ossia che le dette tre faccie siano i nuovi piani fondamentali del sistema.

Con ciò cambierà anche il simbolo di una qualsiasi faccia x. Faremo dunque nelle (1)

$$\begin{array}{lll} h'_1 = 1 \;, & h'_2 = 0 \;, & h'_3 = 0 \,, \\ h''_1 = 0 \;, & h''_2 = 1 \;, & h''_3 = 0 \,, \\ h'''_1 = 0 \;, & h'''_2 = 0 \;, & h'''_3 = 1 \,, \end{array}$$

e chiamando con x'_1, x'_2, x'_3, i nuovi indici della faccia x avremo dalle (1):

$$(1)_b \qquad x'_1 = y_1 \;, \quad x'_2 = y_2 \;, \quad x'_3 = y_3 \,.$$

Dunque i tre numeri y_1, y_2, y_3 denotano gli indici della faccia x, quando essa si immagini riferita al sistema delle coordinate che ha per piani fondamentali h', h'', h''', e per assi r_1, r_2, r_3.

Il nostro problema è pertanto risoluto. Infatti dalle $(1)_b$ e dalle (3) abbiamo:

$$(3)_a \qquad \begin{cases} x'_1 = x_1 r'_1 + x_2 r''_1 + x_3 r'''_1 \,, \\ x'_2 = x_1 r'_2 + x_2 r''_2 + x_3 r'''_2 \,, \\ x'_3 = x_1 r'_3 + x_2 r''_3 + x_3 r'''_3 \,. \end{cases}$$

Le espressioni (1) e le espressioni (3) hanno una grande analogia fra di loro; anzi le une non sono che le reciproche delle altre. Ciò risulterà più chiaro dalle considerazioni che ora faremo.

Allorchè le trasformazioni delle coordinate sono state eseguite col sistema dei trinomi $(3)_a$ sarà possibile determinare gli indici che i vecchi piani fondamentali ricevono per rispetto al nuovo sistema delle coordinate. Trattandosi per esempio del vecchio piano fondamentale (100), per avere il suo nuovo simbolo si farà nelle $(3)_a$ $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$; con ciò i nuovi indici della faccia (100) saranno:

$$x'_1 = r'_1 \;, \quad x'_2 = r'_2 \;, \quad x'_3 = r'_3 \,.$$

E analogamente il simbolo del vecchio piano fondamentale (010) per rispetto al nuovo sistema delle coordinate sarà $(r''_1\, r''_2\, r''_3)$; ed $(r'''_1\, r'''_2\, r'''_3)$ sarà il nuovo simbolo del piano (001).

Mentre dunque $(h'_1\, h'_2\, h'_3)$, $(h''_1\, h''_2\, h''_3)$, $(h'''_1\, h'''_2\, h'''_3)$ rappresentano i simboli dei nuovi piani fondamentali per rispetto al vecchio sistema delle coordinate, rappresenteranno $(r'_1\, r'_2\, r'_3)$, $(r''_1\, r''_2\, r''_3)$, $(r'''_1\, r'''_2\, r'''_3)$ i simboli dei vecchi piani fondamentali per rispetto al nuovo sistema delle coordinate.

E del pari come $[r'_1\, r''_1\, r'''_1]$, $[r'_2\, r''_2\, r'''_2]$, $[r'_3\, r''_3\, r'''_3]$ sono i simboli dei nuovi assi per rispetto al vecchio sistema delle coordinate, così $[h'_1\, h''_1\, h'''_1]$, $[h'_2\, h''_2\, h'''_2]$, $[h'_3\, h''_3\, h'''_3]$ saranno i simboli dei vecchi assi per rispetto al nuovo sistema delle coordinate.

Gli sviluppi fin qui fatti possono essere brevemente e sinteticamente riassunti nel modo che segue.

In tutti questi sviluppi apparisce sempre un trinomio della forma

$$x_1 r' + x_2 r'' + x_3 r''',$$

il quale è maneggevole e noto ai cristallografi pratici.

Esso indica, ove si annulla, che la faccia dal simbolo $(x_1 x_2 x_3)$ giace nella zona dal simbolo $[r' r'' r''']$.

E ove questo trinomio non si annulla, il suo valore, nel problema della trasformazione, dà l'indice nuovo della faccia dal vecchio simbolo $(x_1 x_2 x_3)$ per rispetto ad un nuovo asse il cui simbolo è $[r' r'' r''']$.

Operando la trasformazione dei simboli delle faccie di un cristallo mercè i trinomi $(3)_a$ si introduce insieme un nuovo piano unitario. La nuova faccia unitaria avrà per simbolo (111) per rispetto al nuovo sistema delle coordinate. Per sapere quale è il simbolo di questo nuovo piano unitario per rispetto al vecchio sistema delle coordinate, avremo da fare nelle equazioni (1) $y_1 = y_2 = y_3 = 1$; chiamando gli indici di questa faccia con z_1, z_2, z_3 le (1) ci dànno

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} z_1 = h_1' + h_1'' + h_1''', \\ z_2 = h_2' + h_2'' + h_2''', \\ z_3 = h_3' + h_3'' + h_3'''. \end{cases}$$

D'altra parte il vecchio piano unitario nel vecchio sistema delle coordinate, cioè (111), cambierà di simbolo nel nuovo sistema delle coordinate. Vogliamo chiamare con $(a_1' a_2' a_3')$ questo nuovo simbolo. I suoi indici ci saranno dati dalle equazioni $(3)_a$, facendo quivi $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Avremo dunque:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} a_1' = r_1' + r_1'' + r_1''', \\ a_2' = r_2' + r_2'' + r_2''', \\ a_3' = r_3' + r_3'' + r_3'''. \end{cases}$$

Tutte le indeterminatezze che possono sorgere per effetto di un fattore di proporzionalità dai trinomi (1) e rispettivamente $(3)_a$, cadono di fronte alla determinazione della faccia unitaria, facendo uso degli stessi trinomi. Sia ad esempio dato nel problema della trasformazione che il vecchio piano unitario rimanga piano unitario anche nel nuovo sistema delle coordinate, non potremo allora prendere per indici nuovi i numeri x_1', x_2', x_3' o rispettivamente i loro rapporti $x_1' : x_2' : x_3'$ ma bensì i rapporti seguenti:

$$\text{(6)} \qquad \frac{x_1'}{a_1'} : \frac{x_2'}{a_2'} : \frac{x_3'}{a_3'}.$$

Se poi si volesse generalizzare il problema della trasformazione delle coordinate, e stabilire cioè che non la vecchia faccia unitaria, ma una qualsiasi data faccia, diventi faccia unitaria nel nuovo sistema, avremo da procedere presso a poco come dianzi. Sia $(e_1\, e_2\, e_3)$ il simbolo per rispetto al vecchio sistema delle coordinate di quella qualsivoglia faccia, che deve divenire faccia unitaria nel nuovo sistema delle coordinate; in tale caso i nuovi indici della faccia data x non staranno nei rapporti $x_1' : x_2' : x_3'$ ma bensì nei rapporti seguenti:

$$\frac{x_1'}{e_1'} : \frac{x_2'}{e_2'} : \frac{x_3'}{e_3'}; \tag{7}$$

essendo determinati gli indici e_1', e_2', e_3' mercè le equazioni $(3)_a$ poichè $(e_1' e_2' e_3')$ deve essere il simbolo della faccia $(e_1\, e_2\, e_3)$ per rispetto al nuovo sistema delle coordinate. E questi nuovi indici sono:

$$\begin{cases} e_1' = e_1\, r_1' + e_2\, r_1'' + e_3\, r_1''', \\ e_2' = e_1\, r_2' + e_2\, r_2'' + e_3\, r_2''', \\ e_3' = e_1\, r_3' + e_2\, r_3'' + e_3\, r_3'''. \end{cases} \tag{8}$$

Esempi. — Come primo esempio vogliamo eseguire una trasformazione semplice, vale a dire cambiare un solo degli assi delle coordinate. Il nuovo asse che deve sostituire [100] sia dato dal simbolo [211]. Per questa trasformazione e per cercare il nuovo simbolo di una qualsivoglia faccia x il cui simbolo dato è $(x_1\, x_2\, x_3)$, avremo da calcolare il valore del trinomio

$$x_1\, r_1' + x_2\, r_1'' + x_3\, r_1''',$$

essendo $[r_1'\, r_1''\, r_1'''] = [211]$.

Il valore del dato trinomio è

$$2\, x_1 + x_2 + x_3;$$

epperò i nuovi indici della faccia x saranno

$$\begin{aligned} x_1' &= 2\, x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

Questa trasformazione è subordinata a una determinata faccia unitaria, il cui simbolo nel vecchio sistema delle coordinate si ottiene, facendo nelle ultime equazioni $x_1' = x_2' = x_3' = 1$. Il simbolo di questa nuova faccia unitaria è dunque $(z_1\, z_2\, z_3) = (\bar{1}22)$.

La vecchia faccia unitaria cambia di simbolo nel nuovo sistema delle coordinate. I suoi indici si ottengono facendo nelle ultime equazioni $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Questi indici sono dunque:

$$a'_1 = 2 + 1 + 1 = 4\,,$$
$$a'_2 = 1\,,$$
$$a'_3 = 1\,.$$

Volendo che nella trasformazione delle coordinate rimanga come faccia unitaria la vecchia faccia unitaria (111), si dovranno prendere come nuovi indici della faccia qualsiasi x i rapporti seguenti:

$$\frac{2x_1 + x_2 + x_3}{4} : \frac{x_2}{1} : \frac{x_3}{1}\,,$$

ossia

$$2x_1 + x_2 + x_3 : 4x_2 : 4x_3\,.$$

Il simbolo della faccia x che deriva da questi rapporti si trova dunque riferito al sistema degli assi [211], [010], [001], laddove il simbolo della stessa faccia x cioè $(x_1\, x_2\, x_3)$ è in rapporto col sistema degli assi (100), (010), (001) essendo in ambidue i sistemi la stessa faccia unitaria.

Come secondo esempio considereremo la trasformazione delle coordinate nei *feldispati.*

Questa importante specie minerale fu oggetto di molte ricerche sperimentali e teoriche. La sua comune orientazione è questa che la zona M1T rimane verticale, e la sfaldatura perfetta P guarda sopra verso l'osservatore. Secondo questa orientazione e avendo di mira la simmetria monoclina e triclina, risulta che faccie analoghe e analogamente sviluppate ricevono denominazione diversa, sicchè la figura fondamentale ne rimane incerta. Vari cristallografi si sono occupati di togliere questo inconveniente. Già Chr. S. Weiss considerò l'ortoclasio come pseudodimetrico. Mallart, Wallerant e altri ritennero, come ancora ritengono, i feldispati come pseudomonometrici. Anche Fedorow è di questo avviso osservando che la zona MP è pseudodimetrico-isotropa e la zona MTI è pseudoesagono-isotropa (1). In una Memoria posteriore Fedorow osserva che i feldispati sono dimetricaloidi ed esagonaloidi (2); e in una Nota recente assegna ai feldispati la struttura ottaedrica (3).

Nella mia cristallografia (4) io feci vedere che lo sviluppo delle faccie predominanti avviene attorno agli elementi di una figura fondamentale tertetraedica (drei- und vierzählige), e che principalmente le zone del dodecaedro sono quelle che predominano. Come figura fondamentale dodecaedrica appa-

(1) Zeit. f. Kr. *35*, 50; *39*, 411.
(2) Zeit. f. Kr. *39*, 360.
(3) Zeit. f. Kr. *40*, 543.
(4) C. M. Viola, *Grundzüge der Kristallographie.* Leipzig, 1904, pag. 109.

riscono le 4 zone MTl , lPp , TPo , Mop meglio ed uniformemente sviluppate; onde si assumeranno quali faccie fondamentali $n(0\bar{2}1)$, $e(021)$, $y(\bar{2}01)$ anzichè h , M , P. Tali faccie appariscono fondamentali anche seguendo il sistema di posizione del sig. Fedorow.

I feldispati ci offrono dunque un bello e ricco esempio di trasformazione delle coordinate.

Il problema della trasformazione si riduce a questo: di assumere come nuove faccie fondamentali:

$$\begin{aligned} h' & \ldots (h_1' \; h_2' \; h_3') = (0\bar{2}1), \\ h'' & \ldots (h_1'' \; h_2'' \; h_3'') = (021), \\ h_1''' & \ldots (h_1''' \; h_2''' \; h_3''') = (\bar{2}01). \end{aligned}$$

In primo luogo si determinano nel modo solito le tre zone fondamentali:

$$\begin{aligned} r_1 \ldots |h'' \; h'''| \ldots [r_1' \, r_1'' \, r_1'''] &= [1\bar{1}2], \\ r_2 \ldots |h''' \; h'| \ldots [r_2' \, r_2'' \, r_2'''] &= [112], \\ r_3 \ldots |h' \; h''| \ldots [r_3' \, r_3'' \, r_3'''] &= [\bar{2}00] \text{ (}^1\text{)}. \end{aligned}$$

E per avere gli indici di qualsivoglia faccia x, il cui simbolo nell'orientazione monoclina o triclina è noto $(x_1 \, x_2 \, x_3)$, applicheremo le relazioni $(3)_a$. Esse ci dànno come indici del nuovo simbolo:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + 2\,x_3, \\ x_2' &= x_1 + x_2 + 2\,x_3, \\ x_3' &= -2\,x_1. \end{aligned}$$

È evidente che la faccia unitaria (111) nel monoclino o triclino, non rimarrà faccia unitaria dopo eseguita la trasformazione con le ultime equazioni. Infatti facendo in queste equazioni $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, si avrà, come nuovi indici a_1', a_2', a_3' di questa vecchia faccia unitaria, i seguenti:

$$\begin{aligned} a_1' &= 1 - 1 + 2 = 2, \\ a_2' &= 1 + 1 + 2 = 4, \\ a_3' &= -2. \end{aligned}$$

Dunque la vecchia faccia unitaria nel monoclino o triclino avrà nella posizione pseudododecaedrica il nuovo simbolo $(12\bar{1})$.

All'opposto, facendo nelle precedenti equazioni $x_1' = x_2' = x_3' = 1$, si otterranno gli indici vecchi z_1, z_2, z_3 di quella faccia, la quale nella orientazione pseudododecaedrica diviene faccia unitaria, ammesse le equazioni di trasformazione sopra indicate; questi vecchi indici saranno dunque:

$$\begin{aligned} z_1 &= \quad 0 + 0 - 2 = \bar{2}, \\ z_2 &= -2 + 2 + 0 = 0, \\ z_3 &= +1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

(1) $[\bar{2}00]$ in luogo del simbolo comune [100] per soddisfare alla condizione $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$; vedi equazioni (2).

Ossia la faccia che nella posizione monoclina o triclina ha per simbolo $(\bar{2}03)$ diviene nella posizione dodecaedrica la faccia unitaria (111).

Ecco ora qui appresso i simboli delle principali coppie di faccie dei feldispati prima e dopo la voluta trasformazione:

Faccie	Simboli nella orientazione monoclina e triclina.	Simboli nella orientazione dodecaedrica.	
M	(010)	$(\bar{1}10)$	
l	(110)	$(01\bar{1})$	
T	$(1\bar{1}0)$	$(10\bar{1})$	}110{
P	(001)	(110)	
o	$(\bar{1}11)$	(011)	
p	$(\bar{1}\bar{1}1)$	(101)	
n	$(0\bar{2}1)$	(100)	
e	(021)	(010)	}100{
y	$(\bar{2}01)$	(001)	
h	(100)	$(11\bar{2})$	
f	(130)	$(1\bar{2}1)$	$\}1\bar{2}1\{$
z	$(1\bar{3}0)$	$(\bar{2}11)$	
q	$(\bar{2}03)$	(111)	
v	$(\bar{2}\bar{4}1)$	$(1\bar{1}1)$	}111{
	(201)	$(\bar{1}11)$	
w	$(\bar{2}41)$	$(\bar{1}\bar{1}1)$	

ecc. ecc.

Ognun vede che la nuova denominazione, oltre che essere più semplice della vecchia, dà l'impronta della vera figura fondamentale dei feldispati, secondo quanto l'esperienza è venuta fin qui a stabilire.

Se nella eseguita trasformazione si fosse partiti dai simboli $(0\bar{2}1)$, (021), $(\bar{4}02)$, il risultato sarebbe assolutamente identico. Infatti in tale caso si avrebbe per simboli delle zone r_1, r_2, r_3 risp. $[1\bar{1}\bar{2}]$, $[112]$, $[\bar{1}00]$ in luogo di $[\bar{2}00]$ come precedentemente; e quindi per indici nuovi della faccia x i seguenti:

$$x_1'' = x_1 - x_2 + 2\,x_3,$$
$$x_2'' = x_1 + x_2 + 2\,x_3,$$
$$x_3'' = -\,x_1.$$

Ma allora come faccia unitaria dopo la trasformazione sarà $(\bar{1}01)$. Volendo che, come dianzi, la faccia unitaria sia $(\bar{2}03)$, bisognerà trovare il nuovo simbolo di questa, facendo uso delle ultime equazioni di trasformazione. Si avrà come nuovo simbolo di quest' ultima (221); epperò come indici nuovi della faccia x si prenderanno i rapporti:

$$\frac{x_1''}{2} : \frac{x_2''}{2} : \frac{x_3''}{1}$$

vale a dire:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 : x_1 + x_2 + 2x_3 : -2x_1$$

che sono identici a quelli trovati sopra, cioè $x_1' : x_2' : x_3'$.

Vedremo in un'altra Nota come le regole per la trasformazione degli indici di una faccia sono suscettibili in pratica di una magiore semplicità.

Antropologia. — *Cranî preistorici del Foro Romano.* Nota del Socio A. Mosso.

Questo lavoro sarà pubblicato nelle *Notizie degli Scavi.*

Matematica — *Sur le développement en fraction continue de la fonction* Q *de M. Prym.* Nota di Niels Nielsen, presentata dal Socio U. Dini.

Il est très connu que Laplace [1] a trouvé *formellement*, en transformant une série divergente, une fraction continue que représente la fonction transcendante entière

$$\text{(1)} \qquad L(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt$$

qui a été étudiée par Kramp [2] aussi, tandis que Soldner [3] a appliqué la même méthode illégitime pour développer en fraction continue le logarithme-intégral, savoir la fonction

$$\text{(2)} \qquad li(e^{-x}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

Plus tard Jacobi [4] a démontré rigoureusement la formule de Laplace, tandis que celle de Soldner n'a été démontrée pas encore, à ce que je crois.

(1) *Mécanique céleste*, t. IV, livre 10.
(2) *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres.* Strasbourg, 1799.
(3) *Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante.* Munich, 1809.
(4) Journal de Crelle, t. 12, pp. 346-347, 1834.