ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

bolo di questa, facendo uso delle ultime equazioni di trasformazione. Si avrà come nuovo simbolo di quest' ultima (221); epperò come indici nuovi della faccia x si prenderanno i rapporti:

$$\frac{x_1''}{2} : \frac{x_2''}{2} : \frac{x_3''}{1}$$

vale a dire:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 : x_1 + x_2 + 2x_3 : -2x_1$$

che sono identici a quelli trovati sopra, cioè $x_1' : x_2' : x_3'$.

Vedremo in un'altra Nota come le regole per la trasformazione degli indici di una faccia sono suscettibili in pratica di una magiore semplicità.

Antropologia. — *Cranî preistorici del Foro Romano*. Nota del Socio A. Mosso.

Questo lavoro sarà pubblicato nelle *Notizie degli Scavi*.

Matematica — *Sur le développement en fraction continue de la fonction* Q *de M. Prym*. Nota di Niels Nielsen, presentata dal Socio U. Dini.

Il est très connu que Laplace (1) a trouvé *formellement*, en transformant une série divergente, une fraction continue que représente la fonction transcendante entière

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{L}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt$$

qui a été étudiée par Kramp (2) aussi, tandis que Soldner (3) a appliqué la même méthode illégitime pour développer en fraction continue le logarithme-intégral, savoir la fonction

$$\text{(2)} \qquad li(e^{-x}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt\,.$$

Plus tard Jacobi (4) a démontré rigoureusement la formule de Laplace, tandis que celle de Soldner n'a été démontrée pas encore, à ce que je crois.

(1) *Mécanique céleste*, t. IV, livre 10.
(2) *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*. Strasbourg, 1799.
(3) *Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante*. Munich, 1809.
(4) Journal de Crelle, t. 12, pp. 346-347, 1834.

Or, il est bien remarquable, ce me semble, qu'il est très facile de rendre rigoureuse la méthode illégitime appliquée par Laplace et Soldner et cela d'un point de vue général qui nous permet de déduire immédiatement des résultats analogues trouvés en détournant des difficultés considérables par Legendre ([1]), Laguerre ([2]) et M. Tannery ([3]).

A cet effet, nous avons à démontrer un théorème, nouveau je crois, concernant la méthode que Gauss ([4]) a appliquée dans ses recherches sur la série hypergéométrique, savoir le théoreme:

Appliquons formellement sur la série hypergéométrique toujours divergente:

$$\lim_{k=\infty} F(\nu\,, \varrho\,, k\,, -kx) \tag{3}$$

la méthode de Gauss, nous aurons une fraction continue qui est certainement convergente pour des valeurs finies réelles de ν *et* ϱ, *pourvu que* x *soit une quantité positive et finie.*

Quant à la démonstration de ce théorème, prenons pour point de départ l'intégrale définie

$$U^{\nu,\rho}(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\, t^{\nu-1}}{(1+t)^\rho}\, dt \tag{4}$$

qui a un sens, pourvu que les parties réelles de x et de ν soient positives; le chemin d'intégration coïncide avec l'axe des nombres positifs.

Appliquons ensuite la série de Taylor

$$(1+t)^{-\rho} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{-\varrho}{s} \cdot t^s + R_n,$$

nous avons ce développement asymptotique ([5])

$$U^{\nu,\rho}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\binom{-\varrho}{s} \cdot \Gamma(\nu+s)}{x^{\nu+s}} + R'_n, \tag{5}$$

ce qui nous conduira précisément à la série divergente (3), abstraction faite d'un simple facteur.

Cela posé, une intégration par parties donnera immédiatement, en vertu de (4), si nous y mettons $\nu+1$ au lieu de ν, cette équation fonctionnelle

$$x \cdot U^{\nu+1,\rho}(x) = \nu \cdot U^{\nu,\rho}(x) - \varrho \cdot U^{\nu+1,\rho+1}(x), \tag{6}$$

([1]) *Traité des fonct. ellipt. et des intégrales eulériennes*, t. II, pag. 509, Paris, 1826.

([2]) Bull. de la Soc. Math. de France, t. 7, pp. 72-81, 1879. Oeuvres, t. I, pp. 428-437.

([3]) Comptes Rendus, t. 94, pp. 1698-1701; t. 95, pag. 75, 1882.

([4]) Comment. Gotting., t. 2, pag. 13, 1812. Oeuvres, t. III, pag. 134.

([5]) Voir mon Mémoire: *Sur une intégrale définie*, inséré dans les Mathematische Annalen, t. 59, pp. 89-102, 1904.

d'où, après une légère transformation:

$$(7) \qquad \left\{ \frac{U^{\nu+1,\rho}(x)}{U^{\nu,\rho}(x)} = \cfrac{\nu}{x + \cfrac{\rho}{\cfrac{U^{\nu+1,\rho}(x)}{U^{\nu+1,\rho+1}(x)}}} \right. ;$$

appliquons ensuite l'identité évidente:

$$t^{\nu+1}(1+t)^{-\rho-1} = t^{\nu}(1+t)^{-\rho} - t^{\nu}(1+t)^{-\rho-1},$$

il résulte de même, en vertu de (4)

$$U^{\nu+2,\rho+1}(x) = U^{\nu+1,\rho}(x) - U^{\nu+1,\rho+1}(x),$$

d'où, à l'aide de (7), la fraction continue cherchée

$$(8) \qquad \left\{ \frac{U^{\nu+1,\rho}(x)}{U^{\nu,\rho}(x)} = \cfrac{\nu}{x + \cfrac{\rho}{1 + \cfrac{U^{\nu+2,\rho+1}(x)}{U^{\nu+1,\rho+1}(x)}}} \right. ,$$

dont la loi est évidente.

Supposons maintenant *positive* la variable x et *réels* les paramètres ν et ρ, les quantités $\nu+n$ et $\rho+n$ finissent toujours par être *positives*, et c'est la même chose avec le terme complémentaire

$$U^{\nu+n+1,\rho+n}(x) : U^{\nu+n,\rho+n}(x),$$

ce qui nous conduira précisément au théorème que nous venons d'énoncer.

Cela posé, mettons dans (3) $\rho = 1$, puis introduisons la fonction

$$(9) \qquad Q(x,\nu) = \int_x^\infty e^{-t}\, t^{\nu-1}\, dt,$$

il est évident que cette fonction est une transcendante entière de ν, pourvu que x soit une quantité finie différente de zéro. M. Mellin [1] a indiqué cette autre formule intégrale

$$(10) \qquad \Gamma(\nu)\, e^{x} \cdot Q(x, 1-\nu) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\, t^{\nu-1}}{1+t}\, dt,$$

où il faut admettre que les parties réelles de x et de ν soient positives, ce qui donnera

$$(11) \qquad U^{\nu,1}(x) = \Gamma(\nu)\, e^{x}\, Q(x, 1-\nu).$$

Appliquons ensuite dans (9) l'intégration par parties, il résulte

$$\nu \cdot Q(x,\nu) = Q(x, \nu+1) - e^{-x} \cdot x^{\nu},$$

[1] Voir mon *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, pag. 211, Leipzig, 1906, chez B-G. Teubner.

d'où, en vertu de (11),

$$\frac{U^{\nu,1}(x)}{U^{\nu-1,1}(x)} = \frac{(\nu - 1)\,Q(x\,,1-\nu)}{Q(x\,,2-\nu)} = -1 + \frac{e^{-x}\cdot x^{1-\nu}}{Q(x\,,2-\nu)}\,.$$

Mettons ensuite dans (8) $\varrho = 1$, puis introduisons $1 - \nu$ au lieu de ν, il résulte la fraction continue de Legendre

$$(12)\qquad \left\{ Q(x\,,\nu) = \cfrac{e^{-x}\,x^{\nu}}{x + \cfrac{1-\nu}{1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{2-\nu}{1 + \cfrac{2}{x + \cfrac{3-\nu}{1 + \cfrac{3}{x + \cdots}}}}}}} \right.$$

qui est certainement convergente, pourvu que ν soit *réel*, tandis que x doit être *positif*.

Cela posé, appliquons ces deux identités évidentes

$$(13)\qquad li(e^{-x}) = -\,Q(x\,,0)\quad,\quad L(x) = \tfrac{1}{2}\,.\,Q(x^2\,,\tfrac{1}{2}),$$

nous aurons de (12), en y mettant $\nu = 0$, la fraction continue de Soldner

$$(14)\qquad \left\{ -\,e^{x}\,li(e^{-x}) = \cfrac{\frac{1}{x}}{1 + \cfrac{\frac{1}{x}}{1 + \cfrac{\frac{1}{x}}{1 + \cfrac{\frac{2}{x}}{1 + \cfrac{\frac{2}{x}}{1 + \cfrac{\frac{3}{x}}{1 + \cfrac{\frac{3}{x}}{1 + \cdots}}}}}}} \right.$$

tandis que l'hypothèse $\nu = \frac{1}{2}$ donnera de même la fraction continue de

Laplace

$$(15)\quad \left\{ e^{x^2} \mathrm{L}(x) = \cfrac{\frac{1}{2x}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2x^2}}{1 + \cfrac{\frac{2}{2x^2}}{1 + \cfrac{\frac{3}{2x^2}}{1 + \cfrac{\frac{4}{2x^2}}{1 + \cdots}}}}} \right.$$

Étudions ensuite les réduites de la fraction continue de Legendre ou, ce qui revient au même, de celle-ci:

$$\frac{e^{-x}\, x^{\nu-1}}{\mathrm{Q}(x\,,\,\nu)} = 1 + \cfrac{\frac{1-\nu}{x}}{1 + \cfrac{\frac{1}{x}}{1 + \cfrac{\frac{2-\nu}{x}}{1 + \cfrac{\frac{2}{x}}{1 + \cdots}}}}\,,$$

désignons par

$$\frac{f_0\left(\frac{1}{x}\right)}{g_0\left(\frac{1}{x}\right)}\,,\quad \frac{f_1\left(\frac{1}{x}\right)}{g_1\left(\frac{1}{x}\right)}\,,\quad \frac{f_2\left(\frac{1}{x}\right)}{g_2\left(\frac{1}{x}\right)}\,,\ldots$$

ces réduites, nous aurons

$$f_0\left(\frac{1}{x}\right) = 1\quad,\quad f_1\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1-\nu}{x}$$

$$g_0\left(\frac{1}{x}\right) = 1\quad,\quad g_1\left(\frac{1}{x}\right) = 1\,,$$

et il est évident que les numérateurs et les dénominateurs de nos réduites ultérieures doivent satisfaire à ces équations fonctionnelles

$$(16)\qquad \mathrm{F}_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{F}_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n}{x}\cdot \mathrm{F}_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(17)\qquad \mathrm{F}_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{F}_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n+1-\nu}{x}\cdot \mathrm{F}_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

où nous avons posé pour abréger $\mathrm{F}_n = f_n$ ou bien $\mathrm{F}_n = g_n$.

Cela posé, la conclusion ordinaire de n à $n+1$ donnera sans peine pour les numérateurs ces expressions générales:

$$(18)\quad f_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)=1+\sum_{s=1}^{s=n}\binom{n}{s}\cdot\frac{(n+1-\nu)(n-\nu)\dots(n-s+2-\nu)}{x^s}$$

$$(19)\quad f_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=1+\sum_{s=1}^{s=n+1}\binom{n+1}{s}\cdot\frac{(n+1-\nu)(n-\nu)\dots(n-s+2-\nu)}{x^s},$$

tandis qu'il ne semble pas possible de donner sous simple forme l'expression générale du dénominateur g_n. Le cas particulier de (18) qui correspond à $\nu=0$ a été connu par Laguerre.

Éliminons maintenant de (16) la fonction F_{2n-1}, ce qui s'effectuera en appliquant (17), puis traitons de la même manière la formule nouvelle ainsi obtenue, il résulte cette autre équation fonctionnelle

$$(20)\quad F_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{2n-\nu}{x}\right)F_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{(n-1)(n-\nu)}{x^2}\cdot F_{2n-4}\left(\frac{1}{x}\right),$$

tandis que (17) donnera par le même procédé cette formule analogue

$$(21)\quad F_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{2n+1-\nu}{x}\right)F_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{n(n-\nu)}{x^2}\cdot F_{2n-3}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cela posé, mettons pour abréger

$$(22)\quad x^n\cdot g_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\varphi_{n+1}(x)\quad,\quad x^{n+1}f_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\psi_{n+1}(x)\,,$$

nous aurons

$$(23)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}=\lim_{n=\infty}\frac{\frac{1}{x}\,g_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{f_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}=e^x\,x^{-\nu}\cdot Q(x\,,\nu)\,;$$

combinons ensuite les deux formules (21) et (22), il résulte ces deux équations fonctionelles:

$$\varphi_{n+1}(x)=(x+2n+1-\nu)\,\varphi_n(x)-n(n-\nu)\,\varphi_{n-1}(x)$$
$$\psi_{n+1}(x)=(x+2n+1-\nu)\,\psi_n(x)-n(n-\nu)\,\psi_{n-1}(x),$$

d'où sans peine, en vertu de (23), cette fraction continue

$$(24)\quad Q(x\,,\nu)=\cfrac{e^{-x}\,x^{\nu}}{x+1-\nu-\cfrac{1\cdot(1-\nu)}{x+3-\nu-\cfrac{2\cdot(2-\nu)}{x+5-\nu-\cfrac{3\cdot(3-\nu)}{x+7-\nu-\cdots}}}}$$

qui est certainement convergente pour x *positif* et ν *réel*.

Mettons dans (24) $x=1$, il résulte la fraction continue de M. J. Tannery, tandis que l'hypothèse $\nu=0$ nous conduira à celle que Laguerre a déduite pour le logarithme-intégral. Remarquons encore que l'hypothesè $\nu=\frac{1}{2}$ donnera immédiatement la fraction continue pour la fonction $L(x)$ mentionnée par Laguerre.

Posons ensuite

$$(25)\qquad x^n g_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)=\varphi'_n(x)\quad,\quad x^{n+1} f_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)=\psi'_n(x),$$

il résulte cette valeur limite

$$(26)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{\varphi'_n(x)}{\psi'_n(x)}=e^x\,x^{-\nu}\cdot Q(x,\nu),$$

tandis que la formule (20) donnera ces deux autres

$$\varphi'_n(x)=(x+2n-\nu)\,\varphi'_{n-1}(x)-(n-1)\,(n-\nu)\,\varphi'_{n-2}(x)$$
$$\psi'_n(x)=(x+2n-\nu)\,\psi'_{n-1}(x)-(n-1)\,(n-\nu)\,\psi'_{n-2}(x),$$

d'où cette autre fraction continue

$$(27)\qquad Q(x,\nu)=\cfrac{e^{-x}\cdot x^{\nu}}{x+\cfrac{(1-\nu)\,x}{x+1-\cfrac{1\cdot(2-\nu)\,x}{x+2-\nu-\cfrac{2\cdot(3-\nu)}{x+4-\nu-\cfrac{3\cdot(4-\nu)}{x+6-\nu-\cdots}}}}}$$

qui semble être nouvelle.

Il est évident que la fraction continue (27), convergente pour ν *réel* et x *positif*, nous permet de déduire immédiatement des fractions continues pour les deux fonctions $L(x)$ et $li(e^{-x})$, analogues à celle de Laguerre.

Meccanica. — *Sulla deformazione di un ellissoide elastico.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Corrispondente C. Somigliana.

In questa Nota espongo un procedimento assai semplice per determinare, nel campo racchiuso da un ellissoide, tre funzioni che verificano un certo sistema di tre equazioni indefinite di secondo ordine, e di tre equazioni ai limiti di primo ordine.

Come casi particolari si ottiene l'integrazione delle equazioni dell'equilibrio di un ellissoide elastico, soggetto a tensioni date, agenti sul contorno, nel caso in cui le componenti delle tensioni siano il prodotto di polinomi di un grado qualunque, per la distanza del centro dell'ellissoide dal piano