ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 19 agosto 1906.

Matematica. — *Le superficie, più volte irregolari, di 5° ordine con punti tripli.* Nota di M. De Franchis, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

La ricerca delle superficie di 5° ordine, aventi l'irregolarità $p_g - p_a > 1$, è stata fatta dal sig. Berry [1], con metodo trascendente. Il procedimento geometrico, nel caso che si ammetta la presenza di punti tripli [2], ha tali vantaggi di semplicità, che non stimo inopportuno darne un cenno. In complesso, io proietto la superficie sopra un piano, da uno dei punti tripli: vengo così a trarre vantaggio da un mio risultato relativo ai piani doppi con integrali di Picard [3].

Il metodo si presta utilmente anche alla ricerca di altre superficie irregolari rappresentabili su piani doppi, ma non sempre colla stessa semplicità, intervenendo come fattori di complicazione le possibili componenti multiple che occorre staccare dalla curva di diramazione. Perciò io non ho potuto compiere la determinazione delle superficie di 5° ordine con punti tripli aventi

[1] Berry, *On certain Quintic Surfaces which admit of Integrals of the First Kind of Total Differentials* (Cambridge Philosophical Transactions, t. XIV, parte 2ª, pp. 250-296), vedansi le pagine 271-282.

[2] Secondo l'analisi fatta dal sig. Berry, non esistono, del resto, superficie non rigate di 5° ordine con $p_g - p_a > 1$ e prive di punti tripli.

[3] *I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di 1ª specie* (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1904); *Sugl'integrali di Picard relativi ad una superficie doppia* (Rend. det Circ. Matem. di Palermo, 1905). Credo oramai superfluo citare i notissimi lavori di Severi, Enriques, Picard e Castelnuovo, relativi ai nessi tra l'irregolarità e gl'integrali di Picard.

l'irregolarità 1, delle quali si conoscono, grazie a due Memorie del sig. Berry, quelle dotate di curve multiple [1].

1. Mediante proiezione da uno, O, dei punti tripli, una superficie di 5° ordine con punti tripli può rappresentarsi sopra un piano doppio τ. Se la superficie è irregolare, essa possiede necessariamente un fascio $|C|$ ellittico od iperellittico di curve: il genere del fascio è eguale all'irregolarità della superficie, e le curve del fascio hanno come immagini (semplici) sul piano doppio le curve di un fascio $|T|$, ad ognuna delle quali corrispondono due curve del fascio $|C|$. La curva di diramazione del piano doppio si compone allora, se π è il genere del fascio $|C|$, di $2\pi+2$ curve del fascio $|T|$, spoglie delle loro componenti multiple, contate il massimo numero pari possibile di volte [2]. Il numero π non può superare 3, appunto perchè le sezioni piane per O sono, al massimo, di genere 3.

Sia anzitutto 3 il genere del fascio $|C|$. Le sezioni piane per O sono allora curve di genere 3, incontrate in *un* punto variabile dalle curve C: queste sono adunque curve piane e possono essere o rette o coniche. È nota già l'inesistenza di rigate di 5° ordine e di genere 3, che non siano coni [3]; resta dunque da considerare il caso che le C siano coniche, necessariamente passanti per il punto O. I loro piani formano allora fascio attorno ad un asse OH, passante per O ed appartenente alla superficie; ogni piano per OH seca la superficie F lungo OH e due coniche del fascio $|C|$. Il cono tangente in O alla superficie, il quale cono è luogo delle tangenti in O a queste coniche, se è irreducibile, è, al massimo, di genere 1 ed in corrispondenza birazionale (come serie ∞^1 delle sue generatrici) colla serie ∞^1 di curve C, che è di genere 3, ciò che è assurdo. Da questa considerazione e dalle analoghe che si posson ripetere in tutti i possibili casi di spezzamento del cono tangente in O, segue che le coppie di coniche, secate sulla superficie F da piani per O, si toccano in O. Se ivi hanno la tangente comune (generica) distinta dalla OH, nell'intorno del punto O la superficie F possiede una retta doppia infinitesima, ciò che è in disaccordo col fatto che le sezioni piane per O sono di genere 3. Se poi le due coniche toccano sempre in O la retta OH, e quindi il cono tangente in O alla superficie si spezza in 3 piani passanti per OH, assunto nello spazio un sistema di coordinate cartesiane coll'asse z coincidente con OH e col punto O all'infinito, l'equazione della superficie dev'essere della forma

$$z^2\psi_3+2z(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)=0\,,$$

[1] Vedasi la Memoria citata e l'altra (Mem. II) dello stesso titolo (Cambridge Phil. Trans., t. XX).

[2] Vedansi le mie due Note citate.

[3] Vedasi, ad es., Schwarz: *Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades* (Giornale di Crelle, t. 67, 1866).

ove le ψ, φ, λ sono forme binarie in x, y, di grado eguale all'indice. Proiettando da O la superficie sul piano xy, la curva di diramazione del piano doppio ottenuto dovrebbe decomporsi in otto rette *distinte* passanti per l'origine, cioè, denotando con Ω_8 una forma d'ottavo grado, dovrebbe aversi:

$$(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)^2 - \psi_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) = \Omega_8 ,$$

ove, si badi, $\psi_3 \neq 0$. Da questa relazione ricavasi:

$$\varphi_1 = 0 , \varphi_2^2 = \psi_3 \lambda_1 , 2\varphi_2 \varphi_3 = \psi_3 \lambda_2 , 2\varphi_3 \varphi_4 = \psi_3 \lambda_4 , \varphi_3^2 + 2\varphi_2 \varphi_4 = \psi_3 \lambda_3 ,$$
$$\varphi_4^2 - \psi_3 \lambda_5 = \Omega_8 .$$

Si badi che non è $\lambda_1 = 0$, altrimenti la retta OH non sarebbe semplice. Dalle relazioni precedenti ricavasi (essendo φ_2^2 un quadrato) allora:

$$\psi_3 = \lambda_1 \omega_1^2 , \ \varphi_2 = \omega_1 \lambda_1 ,$$

ove ω_1 è una forma, non nulla, di 1° grado, in x, y. Poi $\varphi_3 = \frac{1}{2}\omega_1 \lambda_2$, $\lambda_2 \varphi_4 = \omega_1 \lambda_1 \lambda_4$. Ora si badi che non può essere φ_4 divisibile per ω_1, altrimenti Ω_8 conterrebbe il fattore multiplo ω_1^2. Allora sarà $\lambda_2 = \omega_1 \xi_1$, ove ξ_1 è una forma lineare, eventualmente nulla. La relazione $\varphi_3^2 + 2\varphi_2 \varphi_4 = \psi_3 \lambda_3$, tenendo presente che φ_3^2 è divisibile per ω_1^2 e ψ_3 pure, porta la conseguenza che $\varphi_2 \varphi_4$ è divisibile per ω_1^2 e, poichè il φ_4 non contiene a fattore ω_1, dev'essere φ_2 divisibile per ω_1^2. Dall'essere $\varphi_2 = \omega_1 \lambda_1$, ricavasi adunque $\lambda_1 = a\,\omega_1$, ove a è una costante diversa da zero. La relazione $2\varphi_3 \varphi_4 = \psi_3 \lambda_4$, cioè $\omega_1^2 \xi_1 \varphi_4 = a\omega_1^3 \lambda_4$, porta subito la conseguenza $\xi_1 = b\omega_1$, con b costante. Nella relazione:

$$\varphi_3^2 + 2\varphi_2 \varphi_4 = \psi_3 \lambda_3 ,$$

non essendo φ_4 divisibile per ω_1, per la ragione già detta, sarebbero i termini φ_3^2 e $\psi_3 \lambda_3$ divisibili per ω_1^3, ma il termine $2\varphi_2 \varphi_4$ solo per ω_1^2, e ciò è assurdo. Dunque *non esistono superficie di 5° ordine, non coni, dotate di punti di tripli ed aventi l'irregolarità* 3 ([1]).

2. Vediamo ora quali superficie di 5° ordine con punti tripli abbiano l'irregolarità 2. In tal caso, il fascio $|C|$ è di genere 2 e le sezioni piane per uno, O, dei punti tripli sono o di genere 3 o di genere 2.

Nel primo caso, le curve C del fascio devono necessariamente incontrare i piani per O in 2 punti variabili, sicchè i coni che le proiettano da O sono quadrici ([2]). La curva di diramazione del piano doppio τ, su cui la superficie vien proiettata da O, sarebbe dunque spezzata in 6 coniche d'uno stesso fascio irreducibile, spoglie, al massimo, dell'unica retta doppia che un tal fascio può possedere, e dovrebbe, nello stesso tempo, essere di 8° ordine, ciò che è impossibile.

([1]) Berry, loc. cit. (Mem. I).

([2]) Le curve C sono 2 a 2 coniugate nell'involuzione determinata su F dalle rette per O, quindi vengono unisecate dalle generatrici dei coni che le proiettano da O.

Sia dunque 2 il genere delle sezioni piane. Le curve C del fascio secano i piani per O in un sol punto variabile, quindi sono curve piane. Se sono rette, la superficie è una rigata di 5° ordine di genere 2. Escluso questo caso ovvio, resta da considerare il caso in cui le curve C siano coniche passanti per O. I loro piani formano allora fascio attorno ad una retta OH della superficie: ogni piano per OH seca sulla superficie una coppia di tali coniche. Il cono tangente in O si spezza necessariamente in 3 piani o passanti tutti per OH o tali che uno passi per OH e gli altri due coincidano. In quest'ultimo caso, poichè la retta OH è una linea *eccezionale* della superficie ed il fascio di coniche ha il genere 2, le coniche C incontrano la OH, oltre che in O, in un punto *fisso* H distinto da O: due coniche C complanari si toccano in O ed in H. Questi sono due punti tripli aventi nei loro intorni una retta doppia infinitesima. Scelto un sistema di assi cartesiani, prendendo OH come asse delle z, il punto O come punto all'infinito di questo asse, il punto H come origine, il piano all'infinito come doppiamente tangente in O, il piano $z=0$ come doppiamente tangente in H, l'equazione della superficie diviene:

$$z^2\psi_1 + 2z\psi_3 + \psi_5 = 0\,,$$

ove ψ_1, ψ_3 e ψ_5 sono forme binarie i x, y, dei gradi 1, 3, 5 e la forma $\psi_3^2 - \psi_1\psi_5$ è priva di fattori multipli.

Questa superficie, che coincide colla XVII ottenuta dal sig. Berry, appartiene, insieme alla superficie di 4° ordine con due tacnodi (avente l'irregolarità 1) alla classe di superficie d'ordine $p+3$, dotate d'un fascio iperellittico di genere p di coniche, possedenti una retta $(p-1)-pla$ e su questa due punti $(p+1)-pli$, nel cui intorno è una retta doppia infinitesima. La loro equazione è appunto riducibile al tipo:

$$z^2\psi_{p-1} + 2z\psi_{p+1} + \psi_{p+3} = 0\,,$$

ove le ψ son forme binarie in x, y, di grado eguale all'indice.

Resta a considerare il caso in cui i piani tangenti in O alla superficie passano tutti e tre per OH, cioè il caso in cui le coniche C toccano in O la retta OH. Prendendo al solito il sistema di assi (OH come asse delle z ed O all'infinito), l'equazione della superficie sarà del tipo:

$$z^2\psi_3 + 2z(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4) + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5) = 0\,,$$

ove le ψ, φ, λ son forme binarie in x, y, di grado eguale all'indice e $\psi_3 \neq 0$. Denotando con Ω_6 una forma di sesto grado *priva di fattori multipli* e con ω_1 una forma lineare (in x, y), dev'essere, per le ipotesi fatte

$$(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)^2 - \psi_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5) = \Omega_6$$

oppure

$$(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)^2 - \psi_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5) = \omega_1^2\Omega_6\,,$$

ed, in ogni caso, non deve essere $\varphi_1 = \lambda_1 = 0$, perchè OH è retta *semplice* della superficie.

Nel 1° caso, devono esser soddisfatte le relazioni:

$$\varphi_1 = 0\,,\ \varphi_2^2 = \psi_3\,\lambda_1\,,\ 2\varphi_2\,\varphi_3 = \psi_3\,\lambda_2\,,\ \varphi_3^2 + 2\varphi_2\,\varphi_4 - \psi_3\,\lambda_3 = \Omega_6\,,$$
$$2\varphi_3\,\varphi_4 = \psi_3\,\lambda_4\,,\ \varphi_4^2 = \psi_3\,\lambda_5\,.$$

Si badi che $\lambda_1 \neq 0$, $\psi_3 \neq 0$. Denotando con ξ_1 una forma lineare, sarà allora: $\psi_3 = \xi_1^2\,\lambda_1$, $\varphi_2 = \xi_1\,\lambda_1$, $\varphi_3 = \frac{1}{2}\,\xi_1\,\lambda_2$ e φ_4 risulterà divisibile per ξ_1 ($\varphi_4^2 = \psi_3\,\lambda_5$), donde Ω_6, cioè $\varphi_3^2 + 2\varphi_2\,\varphi_4 - \psi_3\,\lambda_3$, conterrà, contro l'ipotesi, il fattore multiplo ξ_1^2.

Nel 2° caso, si ha:

$$\varphi_1 = 0\,,\ \varphi_2^2 = \psi_3\,\lambda_1\,,\ 2\varphi_2\,\varphi_3 = \psi_3\,\lambda_2\,,\ \varphi_3^2 + 2\varphi_2\,\varphi_4 = \psi_3\,\lambda_3\,,$$
$$2\varphi_3\,\varphi_4 = \psi_3\,\lambda_4\,,\ \varphi_4^2 - \psi_3\,\lambda_5 = \omega_1^2\,\Omega_6\,,$$

e quindi

$$\varphi_2 = \xi_1\,\lambda_1\,,\ \psi_3 = \xi_1^2\,\lambda_1\,,\ \varphi_3 = \tfrac{1}{2}\,\xi_1\,\lambda_2\,.$$

Dico che φ_4 contiene il fattore ξ_1. Difatti, se non lo contenesse, dalla relazione $\varphi_3^2 + 2\varphi_2\,\varphi_4 = \psi_3\,\lambda_3$, verrebbe φ_2 divisibile per ξ_1^2 e quindi $\lambda_1 = a\xi_1$ (a costante diversa da zero). Badando alla relazione $2\varphi_3\,\varphi_4 = \psi_3\,\lambda_4$, cioè $\xi_1\,\lambda_2\,\varphi_4 = a\xi_1^3\,\lambda_4$, si ricava $\lambda_2 = b\,\xi_1^2$. Nella relazione $\varphi_3^2 + 2\varphi_2\,\varphi_4 = \psi_3\,\lambda_3$ sarebbero allora φ_3^2 e $\psi_3\,\lambda_3$ divisibili per ξ_1^3, ma $2\varphi_2\,\varphi_4$ solo per ξ_1^2, e ciò è assurdo. Dunque φ_4 contiene il fattore ξ_1, ma allora $\Omega_6\,\omega_1^2$ è divisibile per ξ_1^2 e, poichè Ω_6 non contiene fattori multipli, $\xi_1 = \omega_1$ (1). Poniamo adunque $\varphi_4 = \omega_1\,\eta_3$, ove η_3 è una forma cubica. L'equazione della superficie piglia allora la forma:

$$z^2\,\omega_1^2\,\lambda_1 + 2z\omega_1(\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\,\lambda_2 + \eta_3) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) = 0\,,$$

ove

$$(\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\,\lambda_2 + \eta_3)^2 - \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) = \Omega_6\,.$$

Da questa ricavansi le relazioni:

$$\tfrac{1}{4}\,\lambda_2^2 + 2\lambda_1\,\eta_3 = \lambda_1\,\lambda_3\ ,\ \ \lambda_2\,\eta_3 = \lambda_1\,\lambda_4\,,$$

donde λ_2 è divisibile per λ_1. Porremo dunque $\lambda_2 = 2\lambda_1\,\eta_1$, ove η_1 è una forma lineare. Quindi $\lambda_3 = \lambda_1\,\eta_1^2 + 2\eta_3$ e $\lambda_4 = 2\eta_1\,\eta_3$. Insomma, l'equazione della superficie è:

$$z^2\,\omega_1^2\,\lambda_1 + 2z\omega_1(\lambda_1 + \lambda_1\,\eta_1 + \eta_3) +$$
$$+ (\lambda_1 + 2\lambda_1\,\eta_1 + \lambda_1\,\eta_1^2 + 2\eta_3 + 2\eta_1\,\eta_3 + \lambda_5) = 0\,,$$

ove $\eta_3^2 - \lambda_1\,\lambda_5$ (cioè Ω_6) è privo di fattori multipli.

(1) Incorporiamo in ω_1 il fattore di proporzionalità.

I piani per l'asse z vi secano coppie di coniche tangenti a quest'asse nel suo punto all'infinito e che si toccano ivi con contatto quadripunto. Il punto singolare O (punto all'infinito dell'asse delle z) è un punto triplo oscnodale. Questa superficie, che è la XVI del sig. Berry, è un caso limite di quella precedentemente trovata.

Le superficie di 5° ordine, aventi una irregolarità maggiore di uno e punti tripli, sono dunque coni o hanno l'irregolarità 2 e sono birazionalmente identiche a coni di genere 2. In questo caso sono o rigate, o dotate d'un fascio, di genere 2, di coniche. Queste ultime superficie sono quelle con due punti tripli distinti aventi nel loro intorno una retta doppia infinitesima, o quelle con un punto triplo, avente nel suo intorno una retta doppia infinitesima contenente un punto triplo oscnodale.

Fisica. — *Alcuni risultati ottenuti col tubo di Braun* [1]. Nota di F. Piola, presentata dal Corrispondente A. Sella.

In una Nota precedente [2] ho descritto un metodo per lo studio delle variazioni che subisce la magnetizzazione quando la sostanza, che percorre un dato ciclo magnetico simmetrico, sia assoggettata a campi oscillatorî molto rapidi, quali sono quelli ottenuti colle scariche dei condensatori.

La parte nuova del metodo consisteva nel modo di eccitare le oscillazioni ed in quello di modificare la fase del loro inizio rispetto a quella del campo ciclico.

Nella fig. 1 della precedente Nota è rappresentato il tubo di Braun cogli avvolgimenti e rocchetti impiegati, sia pel campo *primitivo* che per quello *sovrapposto*. Nella fig. 1 seguente è data la disposizione schematica dei circuiti e degli apparecchi varî, col tubo di Braun rappresentato in V.

Si ha:

a) $AB_1C_1C_1'B_1'DEA'$ = circuito 1°, ossia oscillante lentamente ed alimentato direttamente dalla conduttura cittadina a 50 volta e 42 periodi per 1″. Esso comprende:

il rocchetto $C_1 C_1'$ producente, nella macchia fluorescente, spostamenti proporzionali al campo magnetizzante,

i due avvolgimenti interni dell'anello, costituiti ciascuno da 180 spire distribuite in 2 strati,

un rocchetto a reazione con resistenza liquida in serie.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica del R. Istituto tecnico di Roma.
[2] Rend. Acc. dei Lincei, vol. XV, 2° sem. 1906, pag. 18.