ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

a zero al tendere all' infinito del punto, a cui ogni volta ci si riferisce; e quindi in base a considerazioni ben note, si ha dalla (III_1):

$$K_0 = \varepsilon \frac{M}{2} \tag{12}$$

(ε designi la costante di attrazione).

Finalmente la (6'), tenendo pure conto delle (9) ne danno, senz'altro:

$$K_3 = -\frac{\omega^2 \operatorname{sen}^2 \psi \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta}{2 C_2} \tag{13}$$

con le altre due relazioni analoghe per K_4, K_5.

Con ciò risulta pienamente determinata la funzione V (all'esterno di E) ed è quindi pure determinato il potenziale esterno:

$$W = V + \Omega$$

della gravità, per il considerato pianeta di figura ellissoidica.

Detto W_1 l'analogo potenziale relativo allo stesso pianeta, quando la rotazione uniforme considerata si compisse intorno all'asse z, e, posto brevemente:

$$\Omega - \frac{\omega^2 r^2}{2} = \overline{\Omega},$$

avremo in base alle condizioni testè stabilite, per ogni punto esterno a E:

$$W = W_1 + K_1'' U_x^{(2)} + K_2'' U_y^{(2)} + K_3 U_{xy}^{(2)} + K_4 U_{xz}^{(2)} + K_5 U_{yz}^{(2)} + \overline{\Omega}. \tag{IV}$$

La (IV) mette senz'altro in evidenza la variazione che nel potenziale esterno della gravità, corrispondente al pianeta considerato, sono determinate, nelle ipotesi ammesse, da una deviazione dell'asse di rotazione dall'asse z.

Matematica. — *Le superficie irrazionali di 5° ordine con infinite coniche.* Nota di M. DE FRANCHIS, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Questa breve Nota si riconnette alla mia precedente sulle superficie irregolari ed ha lo scopo di stabilire i tipi (non proiettivamente identici) delle superficie irrazionali di 5° ordine dotate d'infinite coniche.

1. Le coniche d'una superficie, se sono in numero infinito, formano un sistema algebrico. In una superficie d'ordine maggiore di 4 questo sistema è certo (pel teorema di Kronecker-Castelnuovo) ∞^1. Tale sistema o è un fascio lineare, ed allora la superficie è razionale, o non è lineare: allora, non essendo contenuto totalmente in alcun sistema più ampio, la superficie è

irregolare. Ma su una cotal superficie un sistema ∞^1 di curve razionali è un sistema di curve di livello degl'integrali di Picard di 1ª specie posseduti dalla superficie e quindi è un fascio, dunque le ∞^1 coniche che una superficie irrazionale può possedere formano necessariamente un fascio irrazionale, il cui genere è uguale al genere della rigata cui al superficie è birazionalmente identica, cioè all'irregolarità della superficie stessa.

Limitandoci allo studio delle superficie irrazionali del quint'ordine con infinite coniche, possiamo quindi asserire che i piani di queste coniche formano fascio attorno ad una retta OH, semplice, della superficie e che ogni piano per OH seca la superficie lungo OH e due di queste coniche. La retta OH, necessariamente *eccezionale*, non può essere incontrata in punti mobili dalle coniche del fascio, appunto perchè questo è irrazionale. Sicchè sulla retta OH la superficie possiede due punti tripli distinti o infinitamente vicini. Se il genere del fascio è maggiore di uno, la superficie, avente l'irregolarità maggiore di uno e punti tripli, è necessariamente una di quelle che abbiamo trovato nella Nota precedente, cioè o una superficie con due punti tripli distinti nell'intorno di ciascuno dei quali c'è una retta doppia infinitesima, o una superficie con un punto triplo nel cui intorno di 1° ordine esiste una retta doppia infinitesima con un punto triplo oscnodale.

2. Rimane a fare l'ipotesi che l'irregolarità della superficie sia 1, cioè il fascio di coniche abbia il genere 1. Supponiamo anzitutto che i punti (tripli) O, H, nei quali la retta OH è secata dalle coniche del fascio, siano distinti. Osserviamo che le sezioni piane per O, H, le quali sono incontrate in un punto variabile dalle coniche del fascio devono essere del genere 1 e che due coniche complanari del fascio, oltre a secarsi in O ed H, avranno altri due punti comuni distinti o coincidenti o infinitamente vicini ad O e ad H. Se essi sono a distanza finita da O e da H, la superficie possiede una conica doppia che può eventualmente spezzarsi in due rette incidenti o degenerare in una retta tacnodale: in ogni caso essa è una conica non passante pei punti tripli, ed il cui piano non contiene la retta OH. Che una superficie siffatta esista (¹) è noto; è poi evidente che essa possiede un fascio ellittico di coniche.

Suppongasi ora che uno dei punti variabili d'intersezione delle coppie generiche di coniche complanari sia infinitamente vicino ad O, l'altro invece a distanza finita da O e da H: allora la superficie possiede una conica doppia passante per O ma non per H, e mentre H è un punto triplo ordinario, l'intorno di O possiede una retta doppia infinitesima. La conica doppia può degenerare in 2 rette incidenti, delle quali una sola passa per O.

Se le suddette coniche si toccano invece in O ed in H, siamo, in ge-

(¹) Vedasi Cayley, *On the Deficiency of certain Surfaces* (Math. Ann. Bd. III, 1871) e Berry, *On certain Quintic*, ecc., Nota 2ª (Cambridge Phlil. Trans.. vol. XX, pt. I).

nerale, nel caso del fascio di genere 2 di coniche; siamo, in particolare, nel caso del fascio di genere 1, solo allorquando la superficie possegga una conica doppia passante per O, H (eventualmente degenere in 2 rette incidenti passanti rispettivamente per O, H).

In tal caso è sempre da osservare che negl'intorni dei punti O, H esiste una retta doppia infinitesima.

Se le coniche si osculano in O, la superficie possiede due rette doppie uscenti da O, il quale punto è inoltre oscnodale. Quelle due rette possono, in particolare, coincidere in un'unica retta tacnodale uscente dal punto O.

Con ciò abbiamo esaminato tutti i possibili casi che i punti O ed H siano distinti.

Supponiamo ora che i punti O ed H coincidano, cioè che le coniche del fascio tocchino in O la retta OH. Il punto O è sempre un punto triplo cui è indefinitamente vicino un punto triplo.

Se le due coniche generiche sezioni della superficie con un piano per OH hanno i rimanenti due punti comuni dististi da O, la superficie possiede una conica doppia, eventualmente degenerata in due rette doppie incidenti od in un retta tacnodale. In ogni caso, la conica non passa per O.

Supponiamo ora che le due suddette coniche si tocchino sempre in O con contatto tripunto e badiamo che le sezioni piane per O devono essere di genere 1, e che la curva doppia è incontrata in un sol punto variabile dai piani uscenti da O. Nell'intorno di O, abbiamo quindi necessariamente, una retta doppia infinitesima dotata d'un punto triplo tacnodale H. La superficie F possiede allora, inoltre, una conica doppia passante per O (ma sghemba con OH), la quale può anche, eventualmente, spezzarsi in due rette doppie incidenti, una delle quali passi per O.

Finalmente, se le due coniche sezioni della superficie con un piano generico passante per OH non si secano fuori di O (ed il fascio di coniche ha il genere 1) la superficie possiede in O un punto triplo nel cui intorno è una retta doppia infinitesima con un punto triplo oscnodale e, fra le coniche del fascio, ce n'è una, eventualmente degenere, doppia per la superficie.

All'infuori delle superficie che abbiamo passato in rassegna, e che erano tutte note (1), *non esistono superficie irrazionali di 5° ordine con infinite coniche.*

È inoltre da osservare che le superficie trovate nel n. 2 del presente scritto, sono le uniche superficie irregolari di 5° ordine dotate di un punto triplo O, tale che le sezioni per O siano ellittiche.

(1) Vedasi Berry, *On certain Quintic Surfaces which admit of Integrals of the First Kind of Total Differentials* (Cambridge Philosophical Transactions, t. XIV e t. XX).