ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Matematica. — *Su un lemma del Poincaré*. Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Nella Nota precedente [1] abbiamo stabilito il lemma, che il Poincaré, e dopo di lui, lo Steckloff, lo Zaremba ed altri posero a fondamento delle loro ricerche sul metodo di Neumann per la risoluzione del problema di Dirichlet, per tutti quei campi D che si possono spezzare in un numero finito h di campi D_i, convessi ciascuno rispetto ad un suo punto interno O_i, per modo che col crescere indefinito di h — e col diminuire indefinito delle dimensioni dei campi D_i — i numeri $\frac{3l_i}{2L_i^3}, \frac{1}{13L_i^2}$ (dove l_i ed L_i rappresentano rispettivamente la distanza minima e massima di O_i dal contorno di D_i) divengono grandi a piacere. Notiamo subito che non per ogni campo tale decomposizione sarà possibile: se, per es., il contorno del campo ha una cuspide di seconda specie colla punta volta verso l'esterno del campo, esso non si potrà spezzare in un numero finito di campi convessi ciascuno rispetto ad un suo punto interno. Tuttavia i campi per cui tale decomposizione può farsi sono assai generali: essi comprendono ad esempio, come ora mi propongo di mostrare, i campi cui fu applicato il lemma del Poincaré dagli autori citati, onde viene rimossa l'obbiezione fatta dal prof. Lauricella a queste ricerche. Le condizioni [2] cui tali campi soddisfano sono le seguenti:

1ª *in ogni punto del contorno esiste una tangente determinata*;

2ª *l'angolo acuto* O *delle normali (o delle tangenti) in due punti* P e P′ *del contorno è minore di* ar, *dove* a *è una costante, ed* r *è la distanza dei punti* P e P′;

3ª *esiste un numero* d *tale che, descritto un cerchio* γ *col centro in un punto arbitrario* P *del contorno e raggio* d, *ogni normale al contorno in un punto interno al cerchio incontra il contorno internamente al cerchio al più una volta.*

(1) Questi Rendiconti, pag. 83.

(2) Cfr. ad es. Zaremba, *Sur l'intégration de l'équation* $\Delta u + \xi u = 0$, Journal de Mathématiques. Ser. 5, tom. VIII, pag. 59. Lo studio è ivi condotto per i campi a tre dimensioni: per maggiore semplicità nella presente Nota come nella precedente ci siamo limitati a campi dello spazio a due dimensioni: però la cosa non importa differenze essenziali. Osserviamo di più che veramente la 3ª condizione è alquanto mutata, in quanto che lo Zaremba chiede che, entro il cerchio di raggio d, ogni parallela alla normale in P incontri la curva in un solo punto: ma è ben chiaro che, quando ciò avvenga, sostituendo al più $\frac{d}{2}$ a d è soddisfatta la condizione del testo, onde risulta che questa non è certamente più restrittiva di quella.

Si noti che, se la condizione 3ª è soddisfatta per un valore di d, è soddisfatta per ogni valore minore di d.

Si deduce che per detti contorni si possono ritenere soddisfatte alcune altre condizioni:

4ª. *Siano* $S_1, S_2, S_3, \ldots$ *i punti in cui il cerchio* γ *di centro* P *e raggio* d *incontra il contorno:* $S_1 S_2$ *il segmento del contorno interno al cerchio e contenente* P. *Siano* P_1 *e* P_2 *due punti di* $S_1 S_2$: *l'angolo della corda* $P_1 P_2$ *colla tangente in un punto qualunque di* $S_1 S_2$ *è* $< 2ad$. Infatti esiste fra P_1 e P_2 almeno un punto P_3 la cui tangente è parallela alla corda $P_1 P_2$: P_3 si trova entro all'arco $S_1 S_2$, quindi entro al cerchio, e dista perciò da un punto qualunque Q di $S_1 S_2$ meno di $2d$. La condizione 2ª ci dice dunque che l'angolo della tangente in Q colla tangente in P_3, o (ciò che è lo stesso) colla corda $P_1 P_2$ è $< 2ad$.

5ª. Si deduce dalla 4ª condizione: *l'angolo della corda* $P_1 P_2$ *e della normale in un punto dell'arco* $S_1 S_2$ *è compreso fra* $\frac{\pi}{2} - 2ad$ *e* $\frac{\pi}{2} + 2ad$; *l'angolo di una tangente in un punto dell'arco* $S_1 S_2$ *colla normale in un qualunque altro punto dell'arco stesso è compreso fra* $\frac{\pi}{2} - 2ad$ *e* $\frac{\pi}{2} + 2ad$.

6ª. *Col centro in* P *si descriva un cerchio* γ_1 *di raggio* $\frac{d}{2}$; *e sia* $P_1 P_2$ *il tratto del contorno intorno a questo cerchio e contenente* P. *Le normali a* $P_1 P_2$ *incontrino in* $M_1 M_2$ *il cerchio* γ: *si può scegliere* d *abbastanza piccolo perchè l'area compresa fra l'arco* $P_1 P_2$, *le normali* $P_1 M_1$ *e* $P_2 M_2$ *e l'arco* $M_1 M_2$ *di* γ *sia interna al campo.*

Infatti le normali nei punti dell'arco $P_1 P_2$ incontrano γ nei punti di un arco continuo α di cui M_1 ed M_2 sono punti interni od estremi. Io dico che α contiene il minore degli archi $M_1 M_2$. Ed invero preso un qualunque punto P_3 dell'arco $P_1 P_2$ esso dista da P_1 di meno di d, e l'angolo delle normali in P_1 e in P_3 è per la condizione 2ª $< ad$; quindi il punto M_3 in cui la normale in P_3 incontra γ dista da M_1 di un arco minore di $\frac{\pi}{3} + 2ad$ (1). Se quindi d è piccolo per modo che $\frac{\pi}{3} + 2ad < \pi$, non potrà mai M_3 coincidere col punto diametralmente opposto a M_1 e quindi non potrà mai α contenere completamente il massimo degli archi $M_1 M_2$. Ne segue che per ogni punto del minore degli archi $M_1 M_2$ passa una normale al contorno in un punto dell'arco $P_1 P_2$; per la condizione 3ª segue che tale arco non ha nessun punto comune col contorno. Siccome ancora per la condizione 3ª si ha lo stesso per le normali $P_1 M_1$, $P_2 M_2$, si deduce

(1) Cioè somma di un arco ($< 2ad$) contenuto in un angolo $< ad$ di vertice P_1 e di un arco $\left(\leq \frac{\pi}{3}\right)$ avente corda $\leq P_1 P_3 \leq d$.

che l'area compresa fra l'arco $P_1 P_2$, le normali $P_1 M_1$, $P_2 M_2$ ed il cerchio γ è tutta interna al campo.

2. Prima di accingerci alla dimostrazione promessa facciamo due semplici osservazioni.

Anzitutto si noti che un campo limitato da segmenti di retta si può sempre spezzare nella somma di un numero finito di triangoli, e quindi di campi convessi.

In secondo luogo si consideri un campo convesso il cui contorno sia formato di una parte C_1 tale, che su ogni retta per un punto P di C_1 gli eventuali punti interni siano tutti da una parte di P, e di una parte C_2 qualunque purchè avente in ogni punto tangente determinata e priva di cuspidi. Il campo è convesso rispetto a tutti quei punti, se esistono, per cui non passa nessuna tangente a C_2. Infatti sia O un punto rispetto a cui il campo non è convesso: esisterà un raggio s per O che incontra il contorno in più di un punto e quindi almeno in tre punti: supponiamo che s incontri ordinatamente a partire da O il contorno nei punti $A_1 A_2 A_3 \ldots$ Il tratto $A_1 A_2$ sarà esterno al campo, i tratti OA_1, $A_2 A_3$ interni. A_1, A_2 sono su C_2, poichè sia per A_1 che per A_2 passa la retta $OA_1 A_2$ su cui esistono punti interni al campo sia da una parte che dall'altra di A_1 ed A_2. Spostiamo s attorno ad O con continuità: in una conveniente posizione di s, A_1 ed A_2 coincidono: altrimenti la regione luogo dei punti di $A_2 A_3$ sarebbe staccata dalla regione luogo dei punti di OA_1 e quindi il campo non sarebbe connesso. Siccome A_1 ed A_2 sono sempre su C_2, e C_2 ha in ogni punto una tangente determinata, in tale posizione s tocca C_2. Quindi è dimostrato l'assunto.

3. Si consideri un campo soddisfacente le condizioni del n. 1, e serbando le notazioni del n. 1 condizione 6ª, si costruisca il quadrangolo $M_1 P_1 P_2 M_2$ che ha i lati $M_1 P_1$, $P_2 M_2$, $M_1 M_2$ rettilinei e come lato $P_1 P_2$ l'arco $P_1 P_2$ del contorno. Supponiamo d piccolo per modo che $\cos ad > 0{,}9$, $\operatorname{sen} ad < 0{,}2$, $\operatorname{tg} ad < 0{,}2$: basterà perciò che sia $ad < \frac{\pi}{30}$. Al quadrangolo $P_1 M_1 M_2 P_2$ si può applicare la seconda osservazione del n. 2, considerando come parte C_1 l'insieme dei tre lati rettilinei, come parte C_2 l'arco $P_1 P_2$: per riconoscere la possibilità di ciò, basterà osservare che il quadrangolo sta tutto da una parte di ognuno dei suoi lati rettilinei. Infatti il lato $P_1 P_2$ sta tutto da una parte di $M_1 P_1$ e di $P_2 M_2$ in virtù della condizione 3ª unita coll'osservazione che $P_1 P_2$ è tutto intorno al cerchio γ_1 di centro P e raggio $\frac{d}{2}$. Dal ragionamento usato nel dimostrare che è soddisfatta la condizione 6ª segue inoltre che il segmento $M_1 M_2$ sottende del cerchio γ un arco $< \frac{\pi}{3} + 2ad < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{15} < \frac{2\pi}{3}$; quindi $M_1 M_2$ dista da P più di $\frac{d}{2}$. Esso

è dunque tutto fuori del cerchio γ_1 e quindi non ha punti comuni coll'arco $P_1 P_2$. Concludiamo che $P_1 P_2$ sta tutto da una parte di ciascuno dei lati rettilinei del quadrangolo. Basta quindi dimostrare che i lati $P_1 M_1$ e $P_2 M_2$ non si tagliano mutuamente e che gli angoli $P_1 M_1 M_2$ e $P_2 M_2 M_1$ del quadrangolo non sono $> \pi$. Quest'ultimo fatto risulta immediatamente dall'osservazione che questi angoli sono angoli di due corde del cerchio γ. Quanto all'altro esso sarà evidente quando si mostri che il punto A in cui le rette $P_1 M_1$ e $P_2 M_2$ si incontrano è fuori di γ. Infatti si conducano da P le normali PT_1 e PT_2 alle rette $P_1 M_1$, $P_2 M_2$: sarà $PT_1 = PP_1 \operatorname{sen} PP_1 T_1$, ma $PP_1 = \frac{d}{2}$, $PP_1 T_1$ è, per la condizione 5ª, compresa fra $\frac{\pi}{2} + ad$ e $\frac{\pi}{2} - ad$ quindi $\operatorname{sen} PP_1 T_1 > \cos ad > 0,9$ e $PT_1 > \frac{9}{20} d$. Analogamente $PT_2 > \frac{9}{20} d$. Ora il punto A è fuori o dentro al cerchio γ a seconda che $\frac{PT_1}{d}$ è maggiore o minore di $\operatorname{sen} PAT_1$; ma $\operatorname{sen} PAT_1 < \operatorname{sen} P_2 AP_1 < \operatorname{sen} ad < \frac{1}{5} < \frac{9}{20} < \frac{PT_1}{d}$ quindi A è fuori di γ. Risulta quindi, come si era detto, che il quadrangolo $P_1 M_1 M_2 P_2$ sta tutto da una parte di ciascuno dei suoi tre lati rettilinei. E dalla precedente discussione risulta inoltre che esso è connesso, e per la condizione 6ª del n. 1 tutto interno al campo.

4. Prendiamo ora sulla normale in P al contorno un punto O interno al campo tale che $PO = \frac{1}{4} d$. È facile vedere che $P_1 M_1 M_2 P_2$ è convesso rispetto ad O. Per la seconda osservazione del numero 2, basta mostrare che nessuna tangente a $P_1 P_2$ passa per O. Ora, preso un punto E di $P_1 P_2$ la tangente in esso incontri la normale in P in F, dal triangolo PFE si deduce $PF = PE \frac{\operatorname{sen} PEF}{\operatorname{sen} EFP}$. Ma $PE < \frac{d}{2}$, e, per la condizione 4ª $PEF < ad$, $\operatorname{sen} PEF < \operatorname{sen} ad < 0,2$; EFP è l'angolo della normale in P e della tangente in E quindi è compreso (condizione 5ª) fra $\frac{\pi}{2} - ad$ e $\frac{\pi}{2} + ad$ perciò $\operatorname{sen} EFP > \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - ad\right) = \cos ad > 0,9$. Sarà dunque $PF < \frac{2}{9}\frac{d}{2} = \frac{1}{9} d$. $PO = \frac{1}{4} d$ è quindi sempre maggiore di PF e cioè per O non passa nessuna tangente a $P_1 P_2$.

5. Troviamo ora dei limiti inferiori per i numeri $\frac{3l}{2L^3}, \frac{1}{13L^2}$ per il campo interno al quadrangolo $P_1 M_1 M_2 P_2$. Anzitututto poichè $P_1 M_1 M_2 P_2$ è tutto contenuto nel cerchio di centro P e raggio d sarà

$$L < 2d.$$

Per avere un limite inferiore della minima distanza l di O dal contorno di $P_1 M_1 M_2 P_2$, basta calcolare le distanze δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 di O rispettivamente dai lati $P_1 P_2$, $P_1 M_1$, $P_2 M_2$, $M_1 M_2$. La distanza δ_1 di O dai punti E di $P_1 P_2$ è maggiore della distanza di O dalle tangenti all'arco $P_1 P_2$ nei punti stessi, quindi $\delta_1 > \mathrm{OF} \operatorname{sen} \mathrm{OFE}$. Ma OFE è compreso fra $\dfrac{\pi}{2} + ad$ e $\dfrac{\pi}{2} - ad$ quindi $\operatorname{sen} \mathrm{OFE} > 0,9$; di più $\mathrm{OF} = \mathrm{OP} - \mathrm{PF} > \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9}\right) d = \dfrac{5}{36} d$; quindi

$$\delta_1 > \frac{5}{36}\,\frac{9}{10}\,d = \frac{1}{8}\,d.$$

Se diciamo e_2, e_3, e_4 le distanze di P dai lati $P_1 M_1$, $P_2 M_2$, $M_1 M_2$, sarà evidentemente $\delta_i > e_i - \mathrm{PO} = e_i - \dfrac{1}{4} d$: ci basterà quindi calcolare $e_2\, e_3\, e_4$. Sarà (n. 3) $e_2 = \mathrm{PT}_1 > \dfrac{9}{20} d$. Si deduce

$$\delta_2 > \left(\frac{9}{20} - \frac{1}{4}\right) d = \frac{1}{5}\,d.$$

Analogamente calcolando la lunghezza e_3 della normale PT_2 condotta da P su $P_2 M_2$, si ha

$$\delta_3 > \frac{1}{5}\,d.$$

Rispetto ad e_4 si è già ottenuto al n. 3 $e_4 > \dfrac{d}{2}$: si ha quindi

$$\delta_4 > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) d > \frac{1}{4}\,d.$$

Confrontando i valori di $\delta_1\, \delta_2\, \delta_3\, \delta_4$ si ottiene $l > \dfrac{1}{8}\, d$. Il minore dei due numeri $\dfrac{3l}{2\mathrm{L}^3}$ e $\dfrac{1}{13\mathrm{L}^2}$ è quindi maggiore di $\dfrac{1}{52 d^2}$.

Possiamo quindi conchiudere che il campo $P_1 M_1 M_2 P_2$ soddisfa alle condizioni imposte ai campi parziali D_i in cui si deve dividere il campo D per applicarvi il teorema del Poincaré, in quanto che esso è convesso rispetto ad un suo punto interno, ed i numeri $\dfrac{3l}{2\mathrm{L}^3}$ e $\dfrac{1}{13\mathrm{L}^2}$ crescono indefinitamente al diminuire delle dimensioni del campo.

Ora è ben chiaro che preso un campo soddisfacente alle condizioni del n. 1, si può procedere alla costruzione di simili quadrangoli per modo che ogni parte del contorno appartenga ad uno e ad uno solo di essi come lato curvilineo $P_1 P_2$. Siccome il contorno ha lunghezza finita e la lunghezza di ciascuno di questi archi $P_1 P_2$ è sempre $> d$, otterremo un numero finito di quadrangoli i quali mai ricopriranno due volte un pezzo del campo. Talchè il campo risulterà composto di due parti: l'una è la somma di detti quadrangoli e l'altra consta di un poligono a lati rettilinei (limitato dai segmenti analoghi ad $M_1 M_2$): l'una e l'altra di queste parti si possono spezzare in parti soddisfacenti alle condizioni imposte ai campi parziali D_i; la prima per quanto è detto in questo numero, la seconda per la prima osservazione del n. 2. Il campo totale risulterà quindi diviso nel modo richiesto.

Impiccolendo d — e con ciò aumentando il numero dei campi quadrangolari parziali — e suddividendo, ove occorra, i triangoli in cui si divide il campo poligonale, si potrà fare in modo che i numeri $\frac{3l}{2L^3}$ e $\frac{1}{13L^2}$ per questi campi crescano ad arbitrio.

Risulta quindi che per i campi soddisfacenti alle condizioni del n. 1 si può, come si è detto, applicare il teorema del Poincaré.

Però non sarebbe difficile vedere che non impedirebbe la decomposizione in campi parziali che godano delle proprietà accennate nel n. 1, l'esistenza di un numero finito di punti angolari o di cuspidi di prima specie od anche di cuspidi di seconda specie purchè colla punta volta verso l'interno del campo: e che anche a questi campi più generali si può, ove occorra, applicare il lemma del Poincaré.

Matematica. — *Ancora alcune osservazioni sulle funzioni derivate.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Socio C. Segre.

1. In tre Note precedenti, pubblicate in questi Rendiconti (1), col titolo: *Ricerche sulle funzioni derivate*, ho approfondito assai più che non fosse stato fatto fin qui lo studio delle dipendenze fra le funzioni continue e le loro funzioni derivate — massimamente per il caso in cui taluna di queste funzioni derivate possa assumere valori infiniti od illimitatamente grandi. Ed uno dei principali risultati dell'ultima delle Note citate (2) si può riassumere brevemente nell'enunciato:

Condizione necessaria e sufficiente perchè, nei riguardi di una funzione $f(x)$ continua in un dato intervallo $a \ldots b$ e di una qualunque delle sue funzioni derivate $u(x)$, valga il teorema fondamentale del calcolo integrale è che l'aggregato dei valori della $f(x)$ in un qualunque aggregato di punti di misura nulla abbia misura nulla, abbia inoltre misura nulla l'aggregato dei punti in cui qualcuna delle sue funzioni derivate diviene infinita, ed esista inoltre l'integrale nell'intervallo $a \ldots b$ della funzione derivata.

(1) Vol. XV, 1° semestre 1906, pp. 433, 551, 674.
(2) N. 2, pag. 679.