ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Geodesia. — *Sull'espressione generale della gravità all'esterno di un pianeta, del quale una superficie esteriore di equilibrio sia un ellissoide.* Nota di ADOLFO VITERBI [1], presentata dal Corrispondente P. PIZZETTI.

3. Ora, per compiere la ricerca iniziata nella Nota precedente, dobbiamo, in primo luogo, calcolare l'espressione dell'intensità della gravità all'esterno di E; il che però ci limiteremo a fare solo per i punti di questa superficie.

È bensì vero che dalla (IV°) sarebbe facile dedurre, con semplici derivazioni, l'espressione della gravità relativa al pianeta in esame lungo una direzione qualsivoglia, e ciò per ogni punto esterno alla massa potenziante.

Se non che a noi interessa precipuamente soltanto la conoscenza dell'intensità della gravità, in punti dell'ellissoide E; cioè, ove in particolare si considerasse il Geoide, supposto coincidente con un ellissoide, la conoscenza dell'intensità della gravità, ridotta al Geoide stesso. È per questo che, come si è detto, ci restringeremo a calcolare, in base alla (IV°), l'espressione di questa intensità, ridotta a punti dell'ellissoide E. Ciò facciamo anche per evitare un inutile spreco di spazio. Diremo g, in base alla notazione universalmente in uso, la funzione cercata.

Ora, per il calcolo da eseguirsi, torna molto opportuno servirsi delle coordinate ellittiche. Ricorderemo pertanto che, dette μ, ν le altre due radici della (4), si hanno fra le coordinate ellittiche λ, μ, ν e le considerate coordinate cartesiane, ortogonali dei punti dello spazio, le note relazioni:

$$x^2 = \frac{(\lambda + a^2)(\mu + a^2)(\nu + a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \tag{14}$$

con le altre due analoghe che si ottengono da questa per y, z, scambiando successivamente a con b e con c.

Dicasi quindi dn l'elemento di normale ad uno qualunque degli ellissoidi omofocali a E, corrispondente a un dato valore $\bar{\lambda}$, fra quelli che è suscettibile di assumere il parametro λ, in un punto P qualsivoglia della superficie stessa. Di questo siano μ, ν le altre due coordinate ellittiche. Allora il valore del quoziente differenziale: $\frac{du}{dn}$ in P sarà dato, quando, come

[1] V. Nota precedente a pag. 276.

devesi fare ora, si consideri la normale *esterna* alla superficie, dalla relazione pure ben nota:

$$\frac{du}{dn} = -\frac{1}{\sqrt{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}}.$$

In un punto qualunque di E si avrà, poichè allora $\lambda = 0$:

$$\frac{du}{dn} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\nu}}.$$

Ora, lungo le traiettorie ortogonali agli ellissoidi omofocali a E varia delle tre coordinate ellittiche soltanto λ (ossia u) [1]. Avremo perciò in ogni punto di E:

$$g = \frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial u}\frac{du}{dn} = -\frac{\partial W}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{\mu\nu}}.$$

Per semplicità riterremo, senz'altro sottinteso che ogniqualvolta si parlerà di intensità g della gravità per la massa planetaria in parola, ossia di derivata di W *lungo la normale* ad una delle superficie di livello: $W = \text{cost}$ ci si riferisca sempre all'intensità della gravità corrispondente a punti di E, vale a dire alla derivata di W lungo la normale alla superficie E in uno de' suoi punti. Ciò premesso osserviamo che in virtù delle (15), (15′) potremo porre (poichè al valore: $u = 0$ corrisponde per λ il valore: ∞):

$$U^{(0)} = 2u$$

e in pari tempo:

$$U^{(2)}_x = 2\int_0^u \left(1 - \frac{3x^2}{p\bar{u} - e_a} - \frac{y^2}{p\bar{u} - e_b} - \frac{z^2}{p\bar{u} - e_c}\right)\frac{d\bar{u}}{p\bar{u} - e_a},$$

$$U^{(2)}_{xy} = -4\,xy\int_0^u \frac{d\bar{u}}{(p\bar{u} - e_a)\,p\bar{u} - e_b)}$$

con le altre relazioni analoghe che si ottengono permutando circolarmente fra di loro x, y, z e in pari tempo a, b, c e quindi e_a, e_b, e_c, (u designi in queste formule il valore di questo parametro che compete al punto *potenziato*).

Inoltre, posto brevemente:

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad n_y = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad n_z = \frac{\partial z}{\partial n},$$

[1] Infatti detti ellissoidi possono definirsi come le superficie: $\lambda = \text{cost}$.

avremo dalle (14) (in punti di E):

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
xn_x &= -\frac{p'u_0\,(\mu + a^2)\,(\nu + a^2)}{2\,(a^2 - b^2)\,(a^2 - c^2)\sqrt{\mu\nu}}\,,\\
yn_y &= \frac{p'u_0\,(\mu + b^2)\,(\nu + b^2)}{2\,(b^2 - a^2)\,(b^2 - c^2)\sqrt{\mu\nu}}\,,\\
zn_z &= -\frac{p'u_0\,(\mu + c^2)\,(\nu + c^2)}{2\,(c^2 - a^2)\,(c^2 - b^2)\sqrt{\mu\nu}}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

ove con u_0 si sia designato il valore di u, radice dell'equazione [1]:

$$
pu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}
$$

e z_0 designi il valore di z, relativo a punti di E, offerto cioè dalla (8).

Avremo allora evidentemente in punti di E (poichè in essi: $pu - e_a = a^2$ ecc. ecc.):

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial U_x^{(2)}}{\partial n} &= \frac{2\,p'u_0}{\sqrt{\mu\nu}}\left\{\frac{3\,(\mu + a^2)\,(\nu + a^2)}{(a^2 - b^2)\,(a^2 - c^2)}\,A_1 + \frac{(\mu + b^2)\,(\nu + b^2)}{(b^2 - a^2)\,(b^2 - c^2)}\,C_2 + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{(\mu + c^2)\,(\nu + c^2)}{(c^2 - a^2)\,(c^2 - b^2)}\,B_2\right\} + \frac{2x^2}{a^4}\,\frac{1}{\sqrt{\mu\nu}}\\
\frac{\partial U_{xy}^{(2)}}{\partial n} &= \frac{2\,p'u_0}{\sqrt{\mu\nu}}\left\{\frac{(\mu + a^2)\,(\nu + a^2)}{x\,(a^2 - b^2)\,(a^2 - c^2)}\,y + \frac{(\mu + b^2)\,(\nu + b^2)}{y\,(b^2 - a^2)\,(b^2 - c^2)}\,x\right\}C_2 + \\
&\qquad + \frac{4\,xy}{a^2 b^2\sqrt{\mu\nu}}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

con le altre relazioni analoghe per le rimanenti funzioni armoniche, ellissoidali da considerarsi. Si noti pure che evidentemente l'espressione di: $\dfrac{\partial U^{(0)}}{\partial n}$ si ricava subito dalla (14). È poi superfluo, perchè trattasi di cosa chiara per sè stessa, accennare come le formule considerate vadano adattate ai casi speciali, in cui una delle $x\,,y\,,z$ o due di esse assumano il valore zero.

Le relazioni stabilite ora, ne permettono di costruire senz'altro l'espressione dell' intensità della gravità per punti di E.

Quando si vogliano porre, in essa, in evidenza gli angoli $\psi\,,\vartheta\,,$ che individuano la direzione dell'asse di rotazione, potremo infatti dedurre g

[1] Ben inteso l'equazione in parola definisce il valore di u, a meno di somme di multipli dei periodi relativi alle funzioni ellittiche considerate. Ciò era quasi superfluo far notare.

dalla relazione seguente, che si ricava come immediata conseguenza dalla (IV°), associata alle (11), (11'), (12), (13):

$$
\begin{aligned}
g = g_1 &+ \cos^2 \vartheta \operatorname{sen}^2 \psi \left(m_1 \frac{\partial U_x^{(2)}}{\partial n} + m_2 \frac{\partial U_y^{(2)}}{\partial n} - x n_x \omega^2 \right) + \\
&+ \operatorname{sen}^2 \vartheta \operatorname{sen}^2 \psi \left(n_1 \frac{\partial U_x^{(2)}}{\partial n} + n_2 \frac{\partial U_y^{(2)}}{\partial n} - y n_y \omega^2 \right) + \\
&+ \operatorname{sen}^2 \psi \left(p_1 \frac{\partial U_x^{(2)}}{\partial n} + p_2 \frac{\partial U_y^{(2)}}{\partial u} + z_0 n_z \omega^2 \right) - \\
&- \omega^2 \operatorname{sen}^2 \psi \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{1}{2 C_2} \frac{\partial U_{xy}^{(2)}}{\partial n} + x n_x + y n_y \right) + \\
&+ \omega^2 \cos \vartheta \operatorname{sen} \psi \cos \psi \left(\frac{1}{2 B_2} \frac{\partial U_{zx}^{(2)}}{\partial n} + x n_z + z_0 n_x \right) + \\
&+ \omega^2 \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \psi \cos \psi \left(\frac{1}{2 A_2} \frac{\partial U_{yz}^{(2)}}{\partial n} + y n_z + z_0 n_y \right).
\end{aligned}
\tag{V}
$$

Qui si designò col simbolo g_1 la derivata $\frac{\partial W_1}{\partial n}$, calcolata per il punto considerato di E: vale a dire, l'intensità della gravità che si avrebbe nel punto stesso [1] quando la rotazione uniforme del pianeta avvenisse intorno all'asse z. L'espressione di g_1 si ha subito dalle formule del prof. Pizzetti. Naturalmente nella V°, a n_x, n_y, n_z, $\frac{\partial U_x^{(2)}}{\partial n}$, $\frac{\partial U_y^{(2)}}{\partial n}$ ecc., vanno sostituite le espressioni che per esse ci sono offerte dalle (17), (18) oltrechè dalle relazioni analoghe a queste ultime che si deducono in modo di per sè evidente.

La V° è appunto la relazione che pone in evidenza le variazioni che sull'intensità della gravità, relativa a punti dell'ellissoide E, sono determinate dalla considerata derivazione dell'asse di rotazione rispetto all'asse z.

4. Quando le formule stabilite si vogliano applicare al caso della Terra, ammettendo, come è lecito fare con un'approssimazione sufficiente nella presente ricerca, che il Geoide coincida con un ellissoide, le formule stesse si semplificano in primo luogo, perchè l'ellissoide da considerarsi è allora di rivoluzione (intorno all'asse z). Si dovrà cioè porre in tal caso: $a = b$, mentre sempre: $c < a$. È allora evidente in qual maniera si modifichino le funzioni armoniche ellissoidiche e le loro derivate che servono al calcolo di W e di g. Ed è pure evidente per sè e ben noto in qual modo le funzioni ellittiche che servono al calcolo effettivo di dette funzioni degenerino in funzioni trigonometriche. È pure chiaro come allora:

$$A_1 = B_1 = C_2 \quad , \quad A_2 = B_2 .$$

[1] Appunto ne interessa in particolare, determinare l'espressione della differenza: $g - g_1$.

Però, in sostanza, le (IV°), (V°) non subiscono semplificazioni che importino *modificazioni essenziali*, quando si consideri l'ipotesi particolare caratterizzata dall'essere E un ellissoide di rivoluzione. Perciò potremo, anche parlando dell'ellissoide col quale riterremo confuso il Geoide, valerci delle (IV°), (V°), ove sia senz'altro sottinteso che dette relazioni vadano allora modificate in base all'ipotesi: $a = b$. Naturalmente designeremo per semplicità, l'accennato ellissoide col nome di «*ellissoide terrestre*», giusta una norma generalmente seguita.

Trattando dunque in particolare di quest'ellissoide possiamo affermare che:

Poichè le osservazioni (astronomiche) di latitudine, le quali da molti anni sono eseguite in apposite stazioni permettono di caratterizzare la direzione (variabile col tempo) dell'asse di rotazione terrestre rispetto all'asse minore dell'ellissoide terrestre; ove osservazioni di gravità, eseguite simultaneamente a quelle di latitudine e al pari di queste ripetute a brevissimi intervalli per lungo tempo, permettessero di rilevare le variazioni che nella gravità stessa determinano mutamenti di direzione dell'asse della rotazione diurna, si potrebbe evidentemente, applicando la $\overline{\mathrm{V}}°$, *ritrarre dalle predette misure di gravità, un controllo a quelle di latitudine.*

Anzi sarebbe ancora possibile, determinare in modo molto semplice, con sole misure di gravità, i valori di ϑ, ψ: questo indipendentemente dalle esservazioni di latitudine. Ciò renderebbe ancora più completo il reciproco controllo fra le due classi di osservazioni.

Per determinare i valori di ϑ, ψ caratterizzanti la direzione dell'asse di rotazione terrestre in una data epoca, converrebbe evidentemente considerare le equazioni del tipo ($\overline{\mathrm{V}}°$) corrispondenti a numerosi punti terrestri in ciascuno dei quali si siano fatte osservazioni di gravità nell'epoca considerata (riducendo poi al livello del mare i valori ottenuti dalle misure). Detto g il valore dell'intensità della gravità così dedotto da osservazioni fatte in un dato punto, g_1 il valore calcolato per il punto stesso, nell'ipotesi: $\vartheta = \psi = 0$, si otterrà così dalla differenza:

$$\varDelta g = g - g_1$$

l'ammontare della *perturbazione* della gravità (nel punto in esame), corrispondente ad uno spostamento dell'asse di rotazione, o meglio alla sua deviazione rispetto all'asse designato con z, nell'epoca in cui si fecero le osservazioni.

Dall'insieme delle equazioni del tipo ($\overline{\mathrm{V}}°$), ottenute combinando nel modo indicato le determinazioni sperimentali fatte nei varî punti considerati, con opportuni calcoli, si dovranno poi dedurre, col metodo dei minimi quadrati, i valori più convenienti di ψ, ϑ. Naturalmente la forma stessa della ($\overline{\mathrm{V}}°$) mostra come, quando si volesse eseguire l'accennata determinazione col massimo rigore possibile, occorrerebbe poi applicare i ben noti metodi approssimati ai quali è mestieri ricorrere, allorchè si devono considerare *relazioni osservate* non lineari. Se non che, attesa la estrema piccolezza degli spostamenti dell'asse terrestre si possono invece, nella pratica, semplificare sin dall'inizio le relazioni della forma $(\overline{\mathrm{V}}^\circ)$ che occorre prendere in esame. Così, quando si ritengano trascurabili, in una prima approssimazione tutti i termini di ordine superiore al 1° in ψ, ϑ ciascuna equazione del tipo (V°) si ridurrà ad una della forma:

$$(\overline{\mathrm{V}}_1^\circ) \qquad \Delta g = \omega^2 \psi \left(\frac{1}{\mathrm{B}_2} \frac{\partial \mathrm{U}^{(2)}_{zx}}{\partial n} - x n_z - z_0 n_x \right)$$

che è indipendente da ϑ (Si vede infatti subito come nella (V°), ϑ, che possiamo dire *deviazione dell'asse in longitudine*, non entri se non in termini di ordine non inferiore al II° rispetto allo stesso ϑ e a ψ). È poi evidente come ad equazioni del tipo (V°) si possano sostituire equazioni del tipo $(\overline{\mathrm{V}}^\circ)$ solo quando gli angoli ψ, ϑ siano tanto piccoli da potersi ritenere, senza errori apprezzabili, gli angoli stessi coincidenti con i rispettivi seni, e quindi in pari tempo: $\cos\vartheta = \cos\psi = 1$. Si dovrà poi naturalmente verificare che anche le differenze Δg, riferite alla corrispondente unità di misura siano molto piccole.

Nell'accennato ordine di approssimazione la compensazione delle osservazioni fatte si compirebbe mercè la semplice applicazione del principio della media aritmetica.

Relativamente all'effettiva determinazione degli elementi caratterizzanti la direzione dell'asse di rotazione, in base alle equazioni $(\overline{\mathrm{V}}^\circ)$ oppure $(\overline{\mathrm{V}}_1^\circ)$ è bene osservare come essa richieda la conoscenza delle coordinate cartesiane, ortogonali che servono a individuare la posizione dei singoli punti del Geoide, ai quali si riferiscono le osservazioni. Queste coordinate si devono naturalmente dedurre da quelle geografiche determinate con osservazioni astronomiche. Il calcolo necessario al passaggio da queste coordinate a quelle richiede evidentemente, per essere eseguito, la conoscenza della direzione dell'asse di rotazione terrestre, direzione che potrà essere data soltanto da una lunga serie di osservazioni. Senza però essere costretti a ricorrere a queste, si potrà, nella pratica, fare uso del procedimento seguente:

Con i valori delle coordinate geografiche, dedotti da osservazioni astronomiche, fatte nei punti che è mestieri considerare, si determineranno le coordinate cartesiane, ortogonali dei punti stessi, in base ad un'ipotesi solo grossolanamente approssimata sulla direzione dell'asse della rotazione diurna. Ad es. si supporrà questo coincidente col semiasse minore dell'ellissoide terrestre. Indi, con i valori di x, y, z_0 così calcolati e con i risultati di osservazioni gravimetriche eseguite contemporaneamente a quelle astronomiche nei varî punti in esame, si determinerà in una prima approssimazione, applicando la $(\overline{V}^\circ)$ (o la $\overline{V}^\circ_1$) la direzione dell'asse di rotazione. In base al risultato di tale calcolo si potranno dai predetti valori delle coordinate geografiche dedurre valori più approssimati dei precedenti, per le coordinate cartesiane dei punti in esame: a lor volta questi valori introdotti nelle relazioni del tipo (V°) (o $(\overline{V}^\circ_1)$) permetteranno di individuare valori meglio approssimati di ϑ, ψ (o rispettivamente di ψ), e così di seguito si ripeterà tale procedimento, finchè si siano per le incognite del problema ricavati valori convenientementi esatti. È chiaro come, stante la piccolezza delle deviazioni dell'asse di rotazione terrestre dall'asse z, il procedimento indicato condurrà rapidamente allo scopo da raggiungersi.

Chimica. — *Comportamento dell'aldeide benzoica in presenza di jodilbenzolo e sotto l'azione della luce* (1). Nota preliminare di LUIGI MASCARELLI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Le ricerche di Ciamician e Silber sull'azione chimica della luce e specialmente quelle sul comportamento di un miscuglio di nitrobenzolo e aldeide benzoica (2), mi indussero a studiare l'andamento della reazione nel caso che al nitrobenzolo venisse sostituito il jodilbenzolo. E qui esprimo pubblicamente la mia gratitudine al prof. Ciamician ed al dott. Silber, i quali mi permisero di compiere l'esperienza relativa.

Come si sa, da una miscela di nitrobenzolo e aldeide benzoica esposta alla luce si ottengono parecchi prodotti; alcuni derivano più specialmente dall'aldeide stessa, quale sarebbe la resina fondente a 125-130° (3) che si mostrò essere un polimero dell'aldeide benzoica medesima, altri invece derivano dall'azione reciproca delle due sostanze reagenti; a questi appartengono i prodotti di sostituzione della fenilidrossilamina e cioè:

$$C_6H_5 - N \begin{cases} CO\,C_6H_5 \\ O.CO\,C_6H_5 \end{cases} \qquad C_6H_5.N \begin{cases} CO\,C_6H_5 \\ OH \end{cases}$$

Non nego che l'esperienza mia fosse stata intrapresa nella speranza di poter ottenere una qualche sostanza del tipo della idrossilamina sostituita, ma che però contenesse jodio in luogo dell'azoto. Mi sembrava che tale idea potesse trovare un certo appoggio nel fatto che da molto tempo sono note le basi jodiniche del tipo

$$\begin{array}{c} R - J - R_1 \\ | \\ OH \end{array}$$

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna, agosto 1906.

(2) Rend. Acc. Lincei, 1905, I, 265.

(3) Gazz. Ch. It. *34*, II (1904).