ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia prima del 1° luglio 1906.

Fisica. — *La scarica oscillatoria nei fili di ferro.* Nota del Corrispondente A. Battelli e del dott. L. Magri.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les fonctions dérivées.* Nota di Henri Lebesgue, presentata dal Socio C. Segre.

Dans une Note récente [1] M. Beppo Levi fait de nombreuses objections aux raisonnements des pages 121 à 124 de mes *Leçons sur l'intégration.* Pour répondre à ces critiques il me suffira de rétablir quelques raisonnements intermédiaires, que j'avais cru pouvoir omettre, et de réparer une grosse erreur que j'avais commise à la rédaction en croyant simplifier la démonstration que j'avais donnée dans mon cours du Collège de France; erreur qui m'a été signalée depuis longtemps.

Si l'on remarque qu'à la place de ceux de mes raisonnements qu'il trouve fautifs M. Beppo Levi en emploie d'autres fort analogues, on se rendra compte que ses critiques visent plus la forme que le fond. Je pourrais me contenter de cette constatation, cependant, comme il a cru devoir, pour les démontrer, modifier mes deux principaux énoncés, ce qui diminue le champ de leurs applications, je vais reprendre la question. Je citerai entre guillemets les raisonnements de mon livre.

[1] *Ricerche sulle funzioni derivate,* ces Rendiconti, 1° sem. 1906.

Je vais démontrer que les nombres dérivés d'une fonction continue d'une seule variable réelle sont mesurables et étudier leurs intégrales. « Considérons pour cela une suite de fonctions $u_1, u_2 \ldots$, et les fonctions $\bar{u}, \underline{u}$ égales, pour chaque valeur de x, à la plus grande et à la plus petite des limites des u_n; ce sont les *enveloppes d'indétermination* de la limite des u ». Bien entendu dans la recherche de ces limites x est constant, c'est n qui est variable. « Voici comment on peut obtenir l'enveloppe supérieure $\bar{u}$; v_i est la fonction qui, pour chaque valeur de x, est égale à la plus grande des fonctions u_1, $u_2 \ldots, u_i$; w_i est la limite de la suite croissante $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots$; $\bar{u}$ est la limite de la suite décroissante $w_1, w_2, \ldots$ ». Evidemment la définition de w_i est incorrecte puisque, ainsi définis, tous les w_i seraient égaux; il faut dire: w_1 est la limite de la suite croissante $v_1, v_2, \ldots$; w_i se définit à partir de $u_i, u_{i+1}, \ldots$ comme w_1 à partir de $u_1, u_2, \ldots$. Cette correction a été faite par M. Beppo Levi. « Si les u_i sont des fonctions continues, il en est de même des v_i, les w_i sont donc au plus de première classe et $\bar{u}$ au plus de seconde classe. Un raisonnement analogue s'applique à $\underline{u}$ ».

Avant de continuer la citation je fais remarquer que, pour les applications qui suivent, le cas où certains des w_i seraient infinis importe peu.

« La définition des enveloppes d'indétermination aurait pu être donnée pour une fonction $g(x, h)$, où h est un paramètre remplaçant l'indice de la fonction u_i. L'un des nombres dérivés de $f(x)$ est l'une des enveloppes d'indétermination de $r[f(x), x, x+h]$ (¹), quand on fait tendre h vers zéro, par valeurs de signe déterminé. Mais $r\,[f(x), x, x+h]$ étant continue en (x, h) pour $h \neq 0$, on peut, pour la recherche de ces enveloppes, remplacer l'infinité non dénombrable des valeurs de h par une suite de valeurs de h tendant vers zéro et convenablement choisies. Les nombres dérivés sont donc au plus de seconde classe ». M. Beppo Levi déclare ma démonstration erronée à cause de la dernière partie du raisonnement (²), laquelle est cependant incontestable. S'il s'agit, par exemple, de faire tendre h vers 0 par valeurs positives il suffira de faire parcourir à h une suite de valeurs contenant $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ et contenant entre $\frac{1}{2^i}$ et $\frac{1}{2^{i+1}}$ assez de valeurs pour que, quand h varie entre deux de ces valeurs, x restant constant quelconque, l'oscillation de $r[f(x), x+h]$ soit inférieure à $\frac{1}{i}$.

(¹) $$r\,[f(x), x, x+h] = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(²) Voir la note 1 de la page 434 de ces Rendiconti. La justification du texte s'applique également à ma démonstration des Annali di Mat. 1902, pag. 273, qui est aussi condamnée par M. Beppo Levi.

« Ceci posé, soit Ω le nombre dérivé supérieur à droite de $f(x)$, nous le supposons fini. Prenons arbitrairement des nombres l_n échelonnés de $-\infty$ à $+\infty$ quand n parcourt la suite des nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$, et supposons que $l_{n+1} - l_n$ ne surpasse jamais ε. Prenons des nombres positifs a_n, tels que $\sum_{-\infty}^{+} a_n|l_n|$ soit inférieure à ε. Désignons, pour abréger, $E(l_n < \Omega \leqq l_{n+1})$ par e_n (1), et rangeons les e_n en suite simplement infinie $e_{n1}, e_{n2}, \ldots\ldots$ Enfermons e_{n1} dans des intervalles A_{n1} et $C(e_{n1})$ (2) dans des intervalles I_{n1} choisis de manière que la somme de leurs parties communes soit au plus a_{n1}. Enfermons e_{n2} dans des intervalles A_{n2} et $C(e_{n1} + e_{n2})$ dans des intervalles I_{n2}, les A_{n2} et les I_{n2} étant intérieurs aux I_{n1} et ayant des parties communes de longueur au plus égale à a_{n2}. On enfermera de même e_{n3} dans A_{n3} et $C(e_{n1} + e_{n2} + e_{n3})$ dans I_{n3}, ces intervalles étant contenus dans I_{n2} et ayant pour mesure de leurs parties communes a_{n3} au plus (3).

« En continuant ainsi, on enferme e_n dans A_n et $m(A_n) - m(e_n)$ (4) est au plus a_n; de plus A_n n'a en commun avec les autres A_{n+p} que des intervalles, chacun d'eux étant comptés une seule fois, de longueur totale inférieure à a_n ».

Cela est manifestement inexact; le maximum de la longueur totale des intervalles communs à A_n et aux autres A_{n+p} est la somme s_n des nombres $a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_n$ correspondant aux ensembles e_{n1}, e_{n2}, etc. jusque et y compris e_n.

« Les deux sommes $\Sigma|l_n|m(e_n)$ et $\Sigma|l_n|m(A_n)$ sont convergentes ou divergentes à la fois et, si elles convergent, elles diffèrent de moins de ε. Les deux expressions $\int|\Omega|dx$ et $\Sigma|l_n|m(An)$ ont donc un sens en même temps, et, si elles en ont un, elles diffèrent de moins de $\varepsilon(b - a + 1)$, (a, b) étant l'intervalle positif d'intégration. La même remarque s'applique aux deux expressions $\int\Omega\, dx$ et $\Sigma\, l_n\, m(A_n)$.

« Soit un point x appartenant à e_p, A'_p celui des intervalles A_p qui contient x. Nous attachons à x le plus grand intervalle positif $(x, x + h)$ contenu dans A'_p, de longueur au plus égale à ε et tel que

$$l_p \leq r[f(x), x, (x + h)] \leqq l_{p+1} + \varepsilon.$$

A l'aide des intervalles ainsi définis, on peut former une chaîne d'intervalles

(1) C'est-à-dire que e_n est formé des points tels que l'on ait:

$$l_n < \Omega \leqq l_{n+1}.$$

(2) $C(e_n)$ est l'ensemble des points n'appartenant pas à e_n.

(3) « On suppose que l'on choisit les A_n de manière que ceux qui correspondent à un même indice n'empiètent pas les uns sur les autres, et de même des I_n ».

(4) Le symbole $m(E)$ désigne la mesure de E.

couvrant (a, b) à partir de a (p. 63) ». C'est-à-dire une suite d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et tels que chacun d'eux ait pour origine l'extrémité du précédent ou la limite des extrémités des précédents. Si (t_1, t_2) est un intervalle de la chaîne, $\Sigma|f(t_1) - f(t_2)|$ est une valeur approchée de la variation totale de f, qui tend vers cette variation quand la longueur maximum des intervalles employés tend vers zéro. Cette proposition n'est pas contestée par M. Beppo Levi; il l'utilise au contraire dans son raisonnement.

« Cette chaîne peut servir à évaluer une valeur approchée de la variation totale de f. Cette valeur approchée ainsi trouvée v est comprise entre $v_1 - \varepsilon(b-a)$ et $v_1 + \varepsilon(b-a)$ où $v_1 = \Sigma|l_p|m(B_p)$, en designant par B_p les intervalles employés dans la chaîne et qui proviennent des points de e_p ». Ici il faudrait v_1 et $v_1 + 2\varepsilon(b-a)$. « Les points de A_p qui ne font pas partie de B_p font nécessairement partie de l'un des ensembles A_{p+q} $(q \neq 0)$, donc leur mesure est au plus égale à a_p et v_1 diffère de $\Sigma|l_n|m(A_n)$ de moins de $\Sigma a_n|l_n| < \varepsilon$ ». Cela est inexact, nous pouvons affirmer seulement que l'on a:

$$0 \leq \Sigma|l_n|m(A_n) - \Sigma|l_n|m(B_n) \leq \Sigma s_n|l_n|;$$

et comme le troisième membre ne tend pas vers zéro nous ne sommes pas autorisés à conclure, comme je le faisais, « donc pour que l'un des nombres dérivés d'une fonction, supposé fini, soit sommable, il faut et il suffit « que cette fonction soit à variation bornée; sa variation bornée est l'intégrale de la valeur absolue du nombre dérivé ».

Cela est cependant légitime en ce qui concerne les nombres dérivés bornés parce qu'alors il n'y a qu'un nombre fini de nombres a_n utiles et on peut les supposer tels que $\Sigma s_n|l_n|$ soit aussi petit que l'on veut; c'est ce qu'a bien vu M. Beppo Levi.

Pour le cas général, portons notre attention sur les K premiers termes de la suite $e_{n_1}, e_{n_2}, \ldots$: Σ' désignera une somme étendue aux quantités correspondantes, on a:

$$\Sigma'|l_n|m(A_n) - \Sigma'|l_n|m(B_n) \leq \Sigma' s_n|l_n|,$$

et l'on peut supposer cette dernière quantité plus petite que ε, alors on a:

$$\Sigma'|l_n|m(e_n) - \varepsilon \leq \Sigma'|l_n|m(A_n) - \varepsilon \leq \Sigma'|l_n|m(B_n) \leq$$
$$\leq \Sigma|l_n|m(B_n) \leq \Sigma|l_n|m(A_n) \leq \Sigma|l_n|m(e_n) + \varepsilon;$$

et puisque K et ε sont quelconques l'énoncé susmentionné est établi dans tous les cas. Il suffit maintenant de reprendre les inégalités précédentes, dans le cas où l'on supprime les signes $|\ |$, pour obtenir cet énoncé complémentaire: « l'intégrale indéfinie d'un nombre dérivé sommable est la fonction « f dont il est le nombre dérivé ».

Je passe au second énoncé contesté par M. Beppo Levi, le suivant: « l'intégrale indéfinie d'une fonction sommable admet cette fonction pour dé-

« rivée sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle ». M. Beppo Levi justifie cet énoncé pour les fonctions bornées, il annonce qu'il l'établira dans toute sa généralité mais il ne considère pas le raisonnement que j'ai donné pour le cas général comme probant. Il dit en effet (note 2, pag. 438): « quando infatti si ammette che la funzione integrando sia illimitata, il ra- « gionamento della pag. 124 citata ammette implicitamente che una certa « serie possa derivare termine a termine del che manca la prova ». Voici ce que veut dire M. Beppo Levi.

Je justifie tout d'abord l'énoncé en question pour les fonctions ne prenant que deux valeurs; ma démonstration n'est pas contestée. Je déduis de là, sans aucun raisonnement, que le théorème est vrai aussi des fonctions qui ne prennent qu'une infinité dénombrable et discrète de valeurs; c'est le point contesté.

La proposition est évidente quand il n'y a qu'un nombre fini de valeurs; quand il y en a une infinité il faut un raisonnement intermédiaire, d'ailleurs analogue à celui utilisé au milieu de cette même page 124, qu'on peut formuler ainsi:

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que la suite infinie de valeurs est illimitée dans un seul sens; soit donc une fonction sommable φ ne prenant, par exemple, que les valeurs entières positives. Soit χ_n la fonction égale à φ pour $\varphi \leqq n$ et à n pour $\varphi \geqq n$. χ_n est, aux points d'un ensemble de mesure nulle près, — disons presque partout — la dérivée de son intégrale indéfinie; mais cette intégrale indéfinie croît moins vite que celle de φ, donc les nombres dérivés de l'intégrale de φ sont presque partout au moins égaux a χ_n et par suite à φ.

Mais, si λ est l'un de ces nombres dérivés, on a, d'après le premier théorème de cette note,

$$\int_a^b \lambda\, dx = \int_a^b \varphi\, dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b (\lambda - \varphi)\, dx = 0\,;$$

quels que soient a et b, et puisque $\lambda - \varphi$ est positive ou nulle $\lambda - \varphi$ est presque partout nulle.

Il est vrai que λ peut, peut-être, avoir en certains points une valeur infinie; mais comme ce ne peut être que la valeur $+\infty$ notre conclusion n'en est que renforcée.

Ce point établi la démonstration s'achève sans difficulté.

Les démonstrations que je viens de rappeler ne sont pas les plus simples qu'on puisse donner, mais elles ont eu cet avantage qu'elles m'ont conduit à la démonstration de théorèmes dont je ne soupçonnais pas les énoncés. Ces énoncés une fois connus, il est facile de les légitimer plus simplement, surtout en ce qui concerne le second.

Par exemple cet énoncé se déduit facilement d'une propriété générale des fonctions, indiquée par M. Borel [1], et dont la démonstration est très simple.

Ou encore on peut démontrer le théorème sous la forme géométrique qu'on peut lui donner pour le cas d'une fonction ne prenant que les valeurs 0 et 1 et qui s'énonce ainsi: appelons densité d'un ensemble mesurable en un point M la limite, si elle existe, du rapport de la mesure de la partie de l'ensemble contenu dans un intervalle δ, contenant M, à la mesure de δ quand on fait tendre δ vers zéro. Alors, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, la densité d'un ensemble mesurable est 1 aux points de l'ensemble, 0 aux autres points.

Cela peut se justifier simplement, par exemple à l'aide de raisonnements imités de ceux de M. Vitali [2] et le théorème général s'en déduit.

J'indique en terminant, sans entrer dans les détails nécessaires pour bien préciser les énoncés, que l'on peut étendre aux fonctions de plusieurs variables les résultats considérés. Le principal intérêt de pareils théorèmes me paraît consister en ce qu'ils permettent de raisonner parfois sur les fonctions les plus générales comme sur les fonctions dérivables. Par exemple, les surfaces applicables sur le plan les plus générales, que j'ai considérées dans le travail cité des Annali di Matematica, quand on exprime les coordonnées x, y, z de leurs points en fonction des coordonnées u, v des points correspondants du plan, peuvent être caractérisées par leurs rapports avec les équations:

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1 \quad , \quad S\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0 \quad , \quad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 1 ,$$

auxquelles elles satisfont presque partout.

Matematica. — *Su un lemma del Poincaré.* Nota del dott. Eugenio Elia Levi, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] *Un théorème sur les ensembles mesurables*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 7 déc. 1903.

[2] Vitali, *Sulle funzioni ad integrale nullo* (Rend. del Circolo Mat. di Palermo, XX, 1905). Puisque j'ai l'occasion de citer cette Note, sans en contester l'intérêt, je ferai remarquer que le théorème qui en fait l'objet: une fonction dont l'intégrale indefinie est nulle ne diffère de zéro qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle, est une conséquence immédiate du fait qu'une telle fonction est, presque partout, la dérivée de son intégrale indéfinie.