ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

quello di μ; e ad ogni modo non portano che alla determinazione di un valore medio.

Per lo studio di μ abbiamo però istituito ricerche in cui si determinano direttamente i cicli di magnetizzazione; riferiremo prossimamente sui principali risultati ottenuti.

Matematica. — *Sui covarianti angolari di una forma differenziale di ordine superiore.* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

La denominazione di *covariante angolare* che mi piace di introdurre per una certa classe di covarianti di una forma differenziale, non ha altra ragione che una reminiscenza relativa alle forme differenziali quadratiche, per le quali si conosce un covariante bilineare che, nella interpretazione geometrica di quelle forme, corrisponde al numeratore dell'espressione introdotta dal Beltrami come *coseno dell'angolo* di due direzioni.

Per i casi più complessi che quelli delle ordinarie forme differenziali quadratiche, l'interpretazione geometrica della detta classe di covarianti ci sfugge, ma non sarà ciononpertanto inopportuno conservare la denominazione, la quale servirà a rammentarne immediatamente l'origine.

Le considerazioni che svilupperò in questa breve Nota sono semplicissime, ma non perciò esse mi sembrano meno degne di essere rilevate.

Per una forma differenziale quadratica

$$(1) \qquad \sum_{ij} X_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

è *covariante* la forma

$$(2) \qquad \sum_{ij} X_{ij}\, dx_i\, \delta x_j$$

dove con δx_j si indica una serie di differenziali cogredienti ai dx_j.

Se consideriamo, invece della forma differenziale quadratica, la forma completa di 2° ordine:

$$(3) \qquad \sum_i X_i\, d^2x_i + \sum_{ij} X_{ij}\, dx_i\, dx_j\,,$$

è facile verificare che è covariante l'espressione

$$(4) \qquad \sum_i X_i\, \delta d x_i + \sum_{ij} X_{ij}\, dx_i\, \delta x_j$$

formata anch'essa mediante i due simboli differenziali d e δ; scambiando fra loro questi due, se non se ne ammette la permutabilità, si ha un'altra espressione covariante.

Con una trasformazione di variabili i coefficienti di (3) si trasformano colle formole:

$$(5) \qquad X_i = \sum_h Y_h \frac{\partial y_h}{\partial x_i} \quad , \quad X_{ij} = \sum_{hk} Y_{hk} \frac{\partial y_h}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_h Y_h \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

mentre si ha:

$$(6) \qquad dx_i = \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial y_l} dy_l \quad , \quad \delta dx_i = \sum_{lt} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_l \, \partial y_t} dy_l \, \delta y_t + \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial y_l} \delta dy_l$$

onde sostituendo in (4) e osservando che

$$\sum_i \frac{\partial y_h}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_l}$$

è eguale a 1 solo se $l = h$ ed è zero in ogni caso e che

$$\sum_i \frac{\partial y_h}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_l \, \partial y_t} + \sum_{ij} \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \, \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_l} \frac{\partial x_j}{\partial y_t} = 0$$

si ottiene

$$\sum_h Y_h \, \delta dy_h + \sum_{hk} Y_{hk} \, dy_h \, \delta y_k$$

il che dimostra la covarianza di (4).

Ora ci domandiamo: per una forma differenziale generale di ordine r, di quelle considerate ripetutamente in altri miei precedenti lavori:

$$(7) \qquad \sum_{m=1}^{r} \sum_j X_{j_1 \dots j_m} \, \delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m} ,$$

qual'è l'estensione dei covarianti (4)?

Ricordiamo cosa sono e come sono formate le espressioni differenziali δ. Esse sono i coefficienti delle derivate di f nello sviluppo del differenziale r^{mo} di f stessa; la loro espressione l'abbiamo già trovata nei nostri precedenti lavori ed è

$$(8) \qquad \frac{1}{m!} S_j \sum_i \frac{r!}{i_1! \dots i_m! \, \mu_1! \dots \mu_s!} d^{i_1} x_{j_1} \dots d^{i_m} x_{j_m}$$

in cui il $\sum_i$ si estende a tutti i valori delle i interi positivi maggiori di zero per cui sia

$$i_1 + \dots + i_m = r ,$$

e $\mu_1 \ldots \mu_s$ indicano in generale quante delle i sono eguali rispettivamente ad $i_1 \ldots i_s$ (le sole fra le i che si suppongano fra loro diverse); infine S_j indica la somma dei risultati ottenuti presentando le j in tutti gli $m!$ modi possibili fra loro. In tal modo $m!\,\delta^{(r)}_{j_1 \cdots j_m}$ risulta simmetrico nelle j, e viene a rappresentare la somma di tutti i coefficienti dei termini contenenti la derivata

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} \tag{9}$$

nello sviluppo generale di $d^r f$.

Ma supponiamo che invece di un solo simbolo differenziale d se ne considerino r *diversi* e si indichino con

$$d_1\,,\ d_2\,, \ldots\, d_r$$

che si applichino successivamente alla f formando

$$d_r\, d_{r-1} \ldots d_2\, d_1\,.\, f\,, \tag{10}$$

invece di $d^r f$.

Come si esprimerà lo sviluppo di (10)? Da ogni termine di $d^r f$ come si potrà dedurre ogni termine di (10)?

La considerazione di ciò diventerà più facile senza mutare nella sua sostanza, se invece di immaginare diversi fra loro gli indici j li immaginiamo tutti fra loro eguali, e per un momento sopprimiamo l'indice alle x.

Evidentemente in luogo di ogni termine

$$\frac{r!}{i_1! \ldots \mu_1! \ldots}\, d^{i_1} x \ldots d^{i_m} x\,, \qquad \left(\sum_{\rho=1}^{m} i_s = r\right) \tag{11}$$

si otterrà la somma di tutti quelli ricavati nel seguente modo: degli r simboli d fra loro diversi scegliamone prima un gruppo di i_1 di essi, distribuiamoli cogli indici in ordine decrescente come in (10) e anteponiamoli alla x_{j_1}; indi i_2 dei restanti ordinati come in (10) e anteponiamoli a x_{j_2}, e così di seguito.

Facciamo in tutti i modi possibili *fra loro diversi* questa distribuzione degli r simboli d; e facciamo la somma di tutti i termini ottenuti; questa somma composta esattamente di $\dfrac{r!}{i_1! \ldots \mu_1! \ldots}$ termini starà al posto della (11); se le d diventano tutte eguali, questa somma diventa la (11).

Dopo ciò si comprende come, posto lo sviluppo del differenziale (10) sotto la forma

$$\sum_{m=1}^{r} \sum_{j_1 \cdots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}}\, \Delta^{(r)}_{j_1 \cdots j_m}\,, \tag{12}$$

la $\varDelta^{(r)}_{j_1 \dots j_m}$ si formi dalla $\delta^{(r)}_{j_1 \dots j_m}$ operando su ciascun termine di questo in modo analogo a quanto si è operato su (11).

Così per $r = 2$ è:

$$\varDelta^{(2)}_j = d_2\, d_1\, x_j \quad , \quad \varDelta^{(2)}_{j_1 j_2} = \frac{1}{2} \mathrm{S}_j\, d_1\, x_{j_1}\, d_2\, x_{j_2} \, ,$$

e per $r = 3$ è:

$$\varDelta^{(3)}_j = d_3\, d_2\, d_1\, x_j \, ,$$

$$\varDelta^{(3)}_{j_1 j_2} = \frac{1}{2} \mathrm{S}_j [d_2\, d_1\, x_{j_1}\, d_3\, x_{j_2} + d_3\, d_2\, x_{j_1}\, d_1\, x_{j_2} + d_3\, d_1\, x_{j_1}\, d_2\, x_{j_2}]$$

$$\varDelta^{(3)}_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{6} \mathrm{S}_j\, d_3\, x_{j_1}\, d_2\, x_{j_2}\, d_1\, x_{j_3} \, .$$

Se ora consideriamo insieme alla (7) la espressione:

$$(13) \qquad \sum_{m=1}^{s} \sum_{j} \mathrm{X}_{j_1 \dots j_m}\, \varDelta^{(s)}_{j_1 \dots j_m} \, , \qquad (s \leq r)$$

i coefficienti di questa, con una trasformazione di variabili, si trasformano precisamente come i coefficienti della (7), perchè facilmente si vede che sia gli uni che gli altri si trasformano come le derivate parziali (9) di f [1].

Di qui ne viene che (13) per qualunque $s \leq r$ rappresenta un covariante di (7), e similmente saranno covarianti di (7) quelle altre espressioni ottenute da (13) facendo identici fra loro alcuni dei simboli differenziali d.

Se nella (7) i coefficienti a $1, 2, \dots \mu - 1$ indici si suppongono zero, il che porta che il sommatorio rispetto ad m in (7) si estenda da μ ad r (specializzazioni che sono di carattere invariantivo perchè allora la forma di (7) si conserva colla trasformazione di variabili) anche da μ ad r deve estendersi il sommatorio rispetto ad m nella (13).

Tutte queste espressioni (13), delle quali le prime sono quelle rappresentate da (2) e (4), le chiameremo, per distinguerle, e per la ragione detta in principio, i *covarianti angolari* della forma differenziale di ordine qualunque, senza la pretesa di dare con ciò ad esse alcun significato geometrico.

[1] V. la mia Nota: *Su di un invariante simultaneo* ecc. Rendiconti Ist. Lomb. (2), t. XXXV, 1902, pp. 691-700.