ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Matematica. — *Sopra le funzioni che hanno derivata in ogni punto.* Nota di BEPPO LEVI, presentata dal Socio C. SEGRE.

Nei numeri 5-7 della mia Nota *Sulle funzioni derivate*, pubblicata in questi Rendiconti, vol. XV, 1° sem., pag. 674, mi sono occupato brevemente delle proprietà che ad una funzione conseguono dall'ipotesi che essa abbia derivata determinata — finita od infinita — in ogni punto. A quelle osservazioni voglio aggiungere alcuni sviluppi che non mi paiono privi d'interesse.

1. Premetterò il lemma seguente:

Se una funzione continua $f(x)$ è tale che in tutti i segmenti dell'aggregato complementare ad un certo aggregato perfetto non denso T *ha rapporto incrementale $\leq \alpha$ (α essendo un numero finito arbitrariamente assegnato), esiste in* T *un aggregato denso di punti in cui una derivata a sinistra di $f(x)$ è $\leq \alpha + \eta$, qualunque sia il numero positivo assegnato η.*

Sia invero S l'aggregato dei segmenti complementari a T e sia $m \ldots n$ $(m < n)$ un segmento di S: si ha, per ipotesi, $r[f(x), m, n] \leq \alpha$; per la continuità di $f(x)$ esiste quindi un p tale che, qualunque sia $q < p$, $r[f(x), m, n+q] \leq \alpha + \eta$. Poichè, per ipotesi, T è non denso, in $n \ldots n+p$ esistono segmenti di S, e perchè T è perfetto, esistono di questi segmenti interamente contenuti in tale intervallo. Sia $m_1 \ldots n_1$ uno di questi segmenti (onde $m < n < m_1 < n_1 < n+p$); esisterà un numero p_1 tale che, qualunque sia $q_1 < p_1$, $r[f(x), m_1, n_1 + q_1] \leq \alpha + \eta$. Sia $n_1 + p'_1$ un numero qualunque $> n_1$ e minore di ciascuno dei numeri $n_1 + p_1$, $n+p$. Nell'intervallo $n_1 \ldots n_1 + p'_1$ esisteranno ancora segmenti di S, e sia $m_2 \ldots n_2$ uno di essi: sia ancora p_2 un numero tale che, qualunque sia $q_2 < p_2$, $r[f(x), m_2, n_2 + q_2] \leq \alpha + \eta$ e sia $n_2 + p'_2 \leq (n+p, n_1 + p_1, n_2 + p_2)$.

Proseguendo in questa costruzione si determinerà una successione illimitata di intervalli $m \ldots n+p$, $m_1 \ldots n_1 + p'_1$, $m_2 \ldots n_2 + p'_2$, ... contenuti ciascuno nei precedenti; e le loro ampiezze, a cominciare dal secondo sono rispettivamente minori di $p_1, p'_1, \ldots$ e si può quindi supporre tendano a 0, valendosi dell'arbitrarietà di questi numeri. Questi segmenti avranno quindi un punto limite l interno a tutti e si avrà perciò

$$r[f(x), m_i, l] \leq \alpha + \eta.$$

I punti m_i si avvicinano indefinitamente ad l; quindi una derivata a sinistra di $f(x)$ in l sarà certo $\leq \alpha + \eta$. D'altra parte si osservi che: 1°. l è

punto limite degli estremi $n, n_1, n_2 \ldots$ di segmenti di S; quindi appartiene a T. 2°. Si ha $l - n < p$ e p si può assumere piccolo a piacere; quindi ogni estremo destro n di segmenti di S è limite di punti l; siccome i punti n costituiscono un aggregato denso in T, lo stesso avverrà dei punti l.

Evidentemente il ragionamento si può ripetere per dimostrare l'analoga proposizione per le derivate a destra; ma si può fare di più: determinato p e $m_1 \ldots n_1$ come sopra si disse, si scelga r_1 tale che $n < m_1 - r_1 < m_1$ e che, qualunque sia $s_1 < r_1$ sia $r[f(x), m_1 - s_1, n_1] \leq \alpha + \eta$; poi si scelga il segmento $m_2 \ldots n_2$ di S nell'intervallo $m_1 - r_1 \ldots m_1$ e si determini p_2 in modo che $n_2 < n_2 + p_2 < m_1$ e che, qualunque sia $q_2 < p_2$, sia $r[f(x), m_2, n_2 + q_2] \leq \alpha + \eta$. E così si prosegua prendendo i punti $n + p, n_2 + p_2, n_4 + p_4 \ldots$ rispettivamente a destra dei punti $n\, n_2\, n_4 \ldots$ e i punti $m_1 - r_1, m_3 - r_3, \ldots$ rispettivamente a sinistra di $m_1, m_3, \ldots$ I segmenti $m \ldots n + p$, $m_1 - r_1 \ldots n_1, m_2 \ldots n_2 + p_2, m_3 - r_3 \ldots n_3, \ldots$ avranno ancora un punto limite l' per cui sarà

$$r[f(x), m_{2i}, l'] \leq \alpha + \eta \qquad r[f(x), l', n_{2i+1}] \leq \alpha + \eta .$$

Nel punto l' sarà quindi $\leq \alpha + \eta$ tanto una almeno delle derivate a sinistra quanto una almeno delle derivate a destra. Così:

Nelle stesse ipotesi dell'enunciato precedente esiste pure in T *un aggregato denso di punti in cui una almeno delle derivate così a destra come a sinistra è* $\leq \alpha + \eta$.

Il numero η *si può anche supporre* $= 0$. Basterà infatti, nei precedenti ragionamenti, considerare al luogo del numero fisso η una successione di numeri $\eta, \eta_1, \eta_2 \ldots$ tali che $\lim_{i=\infty} \eta_i = 0$ e supporre i successivi rapporti incrementali minori rispettivamente di $\alpha + \eta, \alpha + \eta_1, \alpha + \eta_2, \ldots$ (1).

2. In forza di questo lemma si può enunciare che:

Se una funzione continua $f(x)$ *ha derivata determinata in ogni punto, l'aggregato dei punti in cui tal derivata vale* $+\infty$ *non può esser denso in un aggregato perfetto* T, *complementare ad un aggregato di segmenti in cui il rapporto incrementale di* $f(x)$ *sia* $\leq \alpha$, *dove* α *è un numero finito arbitrario.*

Infatti in T sarebbe pur denso un aggregato di punti in cui la derivata di $f(x)$ sarebbe $\leq \alpha$: in tutti i punti di T l'oscillazione della derivata,

(1) Facile corollario di questa proposizione è che *se* $f(x)$ *è una funzione continua costante a tratti, nell'aggregato complementare dei tratti di invariabilità di* $f(x)$ *è denso un aggregato di punti in cui una almeno delle derivate a destra e a sinistra della funzione è minore d'un numero positivo arbitrariamente assegnato,* ed anche *è precisamente nulla* (Cfr. Schoenflies, *Bericht ü. die Mengenlehre*, pag. 169, dove il risultato è ottenuto con procedimento del tutto differente).

rapporto a T sarebbe quindi $= +\infty$. Ora ciò è assurdo, perchè essa derivata è una funzione della 1ª classe del Baire.

3. Possiamo dedurre di qui che:

L'aggregato dei punti in cui una funzione continua $f(x)$ avente derivata determinata ovunque ha derivata infinita ha misura nulla (¹).

Si supponga infatti che l'aggregato A dei punti in cui $f'(x) = +\infty$ abbia misura $\mu > 0$. Sia λ la misura dell'intervallo totale in cui la funzione si considera; fissato arbitrariamente un $\mu' > 0$ e $< \mu$ si può determinare un aggregato S' di segmenti contenenti *nel loro interno* tutti i punti dell'aggregato complementare di A ed avente misura $\leq \lambda - \mu'$. L'aggregato perfetto A' complementare a questo aggregato di segmenti è interamente contenuto in A; quindi in esso $f'(x) = +\infty$. La sua misura è $\leq \mu'$

Si ordinino i segmenti di S' in un ordine determinato: se per uno di essi avviene che esso sia contenuto in un intervallo tale che la parte di A' contenutavi abbia misura nulla, gli estremi destro e sinistro d'un tale intervallo saranno estremi destro e sinistro rispettivamente di segmenti di S' ovvero sono punti di condensazione di questi estremi; cosicchè, considerando ordinatamente, nell'ordine prestabilito, questi segmenti si potranno rinchiudere nei segmenti di un altro aggregato di segmenti S, tale che l'aggregato complementare T è interamente contenuto in A', ha la misura μ' di A' e la parte di esso contenuta in un intervallo qualsiasi non ha mai misura nulla.

Fra i segmenti di S *ve n'ha infiniti in cui il rapporto incrementale di $f(x)$ è < 0; e precisamente gli estremi di questi segmenti formano un aggregato denso in* T.

Si supponga infatti che così non fosse e sia $\alpha \ldots \beta$ un intervallo contenente punti di T e tale che il rapporto incrementale di $f(x)$ in ogni segmento di S contenuto in esso sia > 0. Sia $f(\beta) - f(\alpha) = \mathrm{I}$ e sia ν (certo > 0) la misura della parte di T contenuta in $\alpha \ldots \beta$. Sia π il primo punto di T seguente α (interno ad $\alpha \ldots \beta$) e sia $\pi \ldots \pi + \chi$ un qualunque intervallo interno ad $\alpha \ldots \beta$ tale che $r[f(x), \pi, \pi + \chi] > \frac{\mathrm{I}}{\nu}$ e che $\pi + \chi$ sia estremo sinistro d'un segmento S. Sia π_1 il primo punto di T interno ad $\alpha \ldots \beta$ e seguente $\pi + \chi$; si operi sopra π_1 come or ora sopra π, e così si prosegua sui punti $\pi_2, \pi_3, \ldots$ successivamente ottenuti e sui loro punti li-

(¹) È facile vedere che, al contrario, questo aggregato potrebbe avere misura finita qualunque se la funzione non avesse derivata in ogni punto.

Avvicinando questa proposizione a quella enunciata nel n. 2 della Nota sopra citata si potrà dire che: *condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione avente derivata ovunque sia — a meno d'una costante — l'integrale indefinito (nel senso del Lebesgue) della propria derivata è che questo integrale esista e che abbia misura nulla l'aggregato dei valori della funzione in ogni aggregato di punti di misura nulla* (Cfr. il n. 6 della Nota presente).

miti, qualora qualche successione di questi punti si condensasse verso un punto interno ad $\alpha \dots \beta$. Si determinerà una serie di segmenti [1] contenenti nel loro interno la parte di T interna ad $\alpha \dots \beta$ ed i cui segmenti complementari appartengono tutti ad S. La misura totale di questi segmenti sarà $> \nu$; quindi la somma degli incrementi di $f(x)$ in essi è $> \frac{1}{\nu} \nu = 1$: se in tutti i segmenti di S interni ad $\alpha \dots \beta$ l'incremento di $f(x)$ fosse > 0, sarebbe $f(\beta) - f(\alpha) > 1$, contro l'ipotesi.

Si applichi allora il ragionamento del n. 1 scegliendo sempre i segmenti $m_i \dots n_i$ fra quelli in cui il rapporto incrementale di $f(x)$ è ≤ 0: si giungerà alla contraddizione già rilevata al n. 2 (con $\alpha = 0$). Così è provata la nostra proposizione.

4. Se ora si riprende la proposizione dimostrata nel n. 6 della mia Nota sopra citata, si vede che:

La differenza di due funzioni aventi la stessa derivata in ogni punto non può aver derivata in ogni punto senza ridursi ad una costante.

Per vero se due funzioni hanno derivata, e precisamente la stessa derivata in ogni punto, la loro differenza ha derivata in tutti i punti che non appartengono all'aggregato dei punti in cui la derivata data assume i valori $\pm \infty$; in questi punti poi la derivata può esistere o non, esser finita od infinita: ma per la proposizione ora dimostrata questo aggregato ha misura nulla; se allora si suppone che anche in essi la differenza considerata abbia derivata, si può applicare la proposizione del citato n. 6 della Nota precedente e concludere che tal derivata della differenza è nulla in ogni punto.

In altri termini:

Se una funzione ha derivata in ogni punto, essa è determinata dai valori della derivata, a meno di una costante o di una funzione $\varphi(x)$ che non ha derivata in ogni punto [2].

È facile vedere che la funzione $\varphi(x)$ non può nemmeno soddisfare alle condizioni — più larghe di quella di aver derivata — che sia, per ogni x,

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h} = 0$$

e che esista una successione di numeri $h_1 h_2 \dots$ decrescenti e tendenti a 0 tali che esista, per ogni x, il $\lim_{i=\infty} r[\varphi(x), x, x+h_i]$ [3].

[1] Questo ragionamento ha grande affinità con quello discusso nella mia Nota: *Ancora alcune osservazioni sulle funzioni derivate* (Questi Rendiconti, questo volume) e, in qualche piccolo particolare, può essere regolarizzato imitando i ragionamenti di quella Nota.

[2] Inesattamente quindi al n. 5 della Nota citata si afferma che la funzione è determinata dalla sua derivata, a meno d'una costante.

[3] Infatti dalla relazione $\lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h} = 0$ segue anzitutto

5. Le osservazioni dei numeri precedenti indicano come si possa costruire in un determinato intervallo $a \ldots b$ una funzione avente derivata in ogni punto, e derivata infinita nei punti di un determinato aggregato G, perfetto di misura nulla.

Sia cioè S l'aggregato dei segmenti complementari di G; si ordinino i segmenti di S in una serie semplicemente infinita (che si può, per fissare le idee, supporre disposta secondo le lunghezze crescenti) e a ciascun segmento s_i della serie si faccia corrispondere un numero positivo a_i in modo che, detta σ_i la lunghezza di s_i e A un numero finito arbitrariamente assegnato, sia

$$\lim_{i=\infty} \frac{a_i}{\sigma_i} = +\infty \qquad \sum a_i \leq \mathrm{A} \text{ (1)}.$$

In ciascun intervallo s_i si definisca quindi una funzione continua, derivabile, avente derivata infinita negli estremi dell'intervallo (e che per semplicità si potrà supporre monotona) e che nell'intervallo medesimo assuma l'incremento a_i. In ogni punto dell'aggregato S risulterà definita una funzione $f(x)$, derivata della funzione considerata nell'intervallo cui il punto

---

che la funzione $\varphi(x)$ soddisfa al teorema della media: *se in un certo intervallo $\alpha \ldots \beta$ il rapporto incrementale della funzione è k, esiste nell'intervallo almeno un punto in cui la funzione ha derivata, e precisamente uguale a k* (Cfr. Harnack, Math. Ann. 23, pag. 249, *Lehrsatz 6*): dalla relazione medesima segue inoltre che le derivate a destra e le derivate a sinistra della $\varphi(x)$ sono uguali in ogni punto. È facile allora vedere che si può ripetere il ragionamento con cui si stabilisce, per le funzioni aventi derivata ovunque, il teorema del Darboux (V. p. es. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, Paris, 1904, pag. 89) e dire che: *se* A *e* B *sono numeri compresi fra le derivate superiore ed inferiore di $\varphi(x)$ rispettivamente nei punti α, β, esiste nell'intervallo $\alpha \ldots \beta$ almeno un punto in cui $\varphi(x)$ ha derivata e precisamente derivata uguale ad un numero* C *arbitrariamente assegnato fra* A *e* B. Si consideri allora la funzione di 1ª classe del Baire $\lim_{i=\infty} r[\varphi(x)\, x\, x + h_i]$: ad essa, dopo le cose precedenti, si applicano tutti i ragionamenti del n. 6 della mia Nota già citata, onde si può concludere che in ogni punto $\lim_{i=\infty} r[\varphi(x)\, x\, x + h_i] = 0$, e quindi la derivata di $\varphi(x)$ è nulla in ogni punto ove essa esiste. Ravvicinando questo fatto alla generalizzazione ora ricordata del teorema del Darboux si conclude che in ogni punto $\varphi(x)$ ha derivata nulla.

(1) Basterà, per es., scomporre la $\sum_1^\infty \sigma_i$ in somme parziali $\sum_{i=m_\alpha}^{i=m_{\alpha+1}} \sigma_i$ in modo che, posto

$$\sum_1^\infty \sigma_i = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=j} \sum_{i=m_\alpha}^{i=m_{\alpha+1}} \sigma_i + \mathrm{R}_{j+1}, \text{ sia per ogni } j \sum_{i=m_{j+1}}^{i=m_{j+2}} \sigma_i > \frac{1}{2}\mathrm{R}_{j+1}$$

e assumere quindi $a_i = \dfrac{\mathrm{A}}{2(b-a)} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\alpha-1} \sigma_i$ per tutti gli i compresi fra m_α e $m_{\alpha+1}$.

appartiene. Si completi la definizione di $f(x)$ ponendola $= +\infty$ nei punti di G e si ponga infine

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx\,.$$

Sarà $F(a) = 0$, $F(b) = \sum a_i \leq A$; inoltre $F(x)$ sarà monotona e quindi, per ogni x, $F(x) \leq A$; infine

$$r[F(x), x, x+h] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx\,.$$

Se allora esiste un h_1 tale che l'intervallo $x \ldots x + h_1$ sia interamente contenuto in un segmento s_i, è evidentemente

$$\lim_{h=0} r[F(x), x, x+h] = f(x);$$

se invece un tale h_1 non esiste, si chiamino generalmente s_t gli s_i appartenenti ad $x \ldots x + h$; sarà

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = \sum_t a_t = \sum_t \frac{a_t}{\sigma_t}\sigma_t$$

ed

$$h = \sum_t \sigma_t\,.$$

Quindi il valore di $r[F(x), x, x+h]$ sarà maggiore del minimo valore dei rapporti $\frac{a_t}{\sigma_t}$; diminuendo h diminuiscono i σ_t e cresce quindi indefinitamente il loro posto nella serie dei σ_i; quindi, per h sufficientemente piccolo, il minimo nominato di $\frac{a_t}{\sigma_t}$ diviene grande a piacere e

$$\lim_{h=0} r[F(x), x, x+h] = +\infty = f(x)\,.$$

Ugualmente si ragiona nel calcolo del $\lim r[F(x), x, x-h]$.

In ogni punto adunque la funzione $F(x)$ ha per derivata $f(x)$.

6. Basta ora aggiungere alla funzione $F(x)$ una funzione (del tipo di quelle dell'Harnack) [1] costante a tratti nei segmenti s_i, per ottenere un'altra funzione avente ancora derivata in ogni punto, e la stessa derivata di $F(x)$, ma non identica a questa. E la nuova funzione potrà avere nell'intervallo $a \ldots b$ un incremento arbitrario mentre, assumendo A sufficientemente piccolo, si potrà supporre che l'integrale della sua derivata sia piccolo a piacere [2].

[1] Harnack, *Math. Ann.* 24, p. 227-230; Schoenflies, *Bericht ü. die Mengenlehre*, Jahresberichte d. d. Math.-Verein. 8-1900, p. 171.

[2] Si deduce l'indipendenza delle due condizioni enunciate nella nota al n. 3 come necessarie e sufficienti per la validità del teorema fondamentale del calcolo integrale, nel caso di funzioni aventi derivata ovunque.