ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Fisica matematica. — *Sull'induzione magnetica.* Nota del dott. Luciano Orlando, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

Un caso notevole d'integrazione della Δ_2 si presenta nel problema dell'induzione magnetica per i corpi isotropi ([1]).

Noi supponiamo che un corpo magnetico isotropo S, limitato da una superficie σ, sia posto in un campo magnetico del quale la nota funzione W rappresenti la funzione potenziale. Sia k una costante positiva, che esprime il coefficiente di magnetizzazione del corpo S. Il problema di determinare la magnetizzazione, assunta da S in queste circostanze, si traduce analiticamente in quello di determinare un integrale φ della $\Delta_2 \varphi = 0$, che verifichi anche l'equazione

$$\text{(1)} \qquad W + \varphi - k \int \frac{d\varphi}{dn} \frac{1}{r} \, d\sigma = 0 ;$$

dove il simbolo $\frac{d}{dn}$ rappresenta la derivata sulla normale, volta verso l'interno di S; l'integrale si estende a tutta la superficie; e la grandezza $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ denota l'intervallo fra il polo A_0, di coordinate x_0, y_0, z_0, nel quale si cerca di determinare la funzione φ, e un altro punto A, di coordinate x, y, z, che qui varia sulla superficie σ.

Noi vogliamo restringerci a quei campi S dei quali la superficie σ non presenti concavità; ma non omettiamo peraltro dal nostro studio il caso che tale superficie σ possa presentare facce piane, così disposte che il piano di ognuna di queste facce lasci tutto da una parte il campo S. Tenendo tale ipotesi, che lascia ancora una grandissima libertà alla forma del campo S, noi vogliamo, in un arbitrario polo A_0, di coordinate x_0, y_0, z_0, contenuto in questo campo, determinare $\varphi(x_0, y_0, z_0)$.

Un notissimo teorema lascia scrivere la formula

$$\text{(2)} \qquad 4\pi\varphi = \int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{d\varphi}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma ,$$

([1]) Il prof. Boggio in una sua Nota pubblicata nei Rendiconti di Parigi, e poi tradotta in italiano nel Nuovo Cimento, marzo 1906, risolve per integrali definiti, con molta eleganza, preferibile di certo alla pesantezza di questo nostro metodo, il problema dell'induzione magnetica per la sfera isotropa. Rimandiamo il lettore alle indicazioni ivi contenute sui notevoli lavori del Somigliana a proposito dello stesso tema. I due Autori hanno, nel caso della sfera, espresso la funzione φ per integrali definiti.

valida per ogni funzione φ, regolare in S, e soggetta ivi alla condizione $\Delta_2 \varphi = 0$. Da (2) si ricava

$$-k\int \frac{d\varphi}{dn}\frac{1}{r}\,d\sigma = 4\pi k\varphi - k\int \varphi\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma .$$

Sostituendo in (1), otteniamo subito

$$(3) \qquad \varphi(x_0\,,y_0\,,z_0) = -\frac{W(x_0\,,y_0\,,z_0)}{4\pi k+1} + \frac{k}{4\pi k+1}\int \varphi(x\,,y\,,z)\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma .$$

Quest'*equazione integrale* rientra in quelle che si possono integrare coi metodi di Volterra, Fredholm, Hilbert; ma è più semplice un metodo di approssimazioni successive, che ora qui indicheremo, il quale ci darà, in ogni successiva approssimazione, chiara idea del corrispondente errore.

Osserviamo intanto che φ deve essere una funzione finita, e che, anche in modo molto grossolano, si può sempre stabilire un criterio per determinare un numero Φ, che non sia superato da alcun valore di $|\varphi|$, fra quelli che $|\varphi|$ può acquistare sopra σ. Il numero $\frac{k}{4\pi k+1}$ può, poi, scriversi $\frac{\alpha}{4\pi}$, dove α è un numero positivo fisso < 1. Oltre a ciò l'integrale

$$\int \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma = \int \left|\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right| d\sigma$$

rappresenta l'angolo visuale della superficie σ da A_0, perciò non supera certamente 4π. Da tutte queste osservazioni, si deduce subito che il modulo dell'espressione

$$\frac{k}{4\pi k+1}\int \varphi(x\,,y\,,z)\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma$$

non supera $\alpha\Phi$, dove dunque α rappresenta un numero positivo fisso < 1.

Se ora poniamo semplicemente

$$(a) \qquad \varphi(x_0\,,y_0\,,z_0) + \varepsilon_1(x_0\,,y_0\,,z_0) = -\frac{W(x_0\,,y_0\,,z_0)}{4\pi k+1}\,,$$

invece di (3), l'errore $|\varepsilon_1|$, che così facciamo nella determinazione di $\varphi(x_0\,,y_0\,,z_0)$ non supera $\alpha\Phi$. Vale evidentemente la formula

$$\varepsilon_1(x_0\,,y_0\,,z_0) = \frac{k}{4\pi k+1}\int \varphi(x\,,y\,,z)\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma ,$$

della quale il secondo membro contiene la funzione incognita φ.

Se poi poniamo

$$(4)\qquad \varphi(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon_2(x_0, y_0, z_0) = -\frac{W(x_0, y_0, z_0)}{4\pi k + 1} + \frac{k}{4\pi k + 1}\int [\varphi(x, y, z) + \varepsilon_1(x, y, z)]\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma,$$

il secondo membro di questa formula è noto; e ragioni analoghe alle precedenti mostreranno che l'errore $|\varepsilon_2|$, che si commette ora nella determinazione di $\varphi(x_0, y_0, z_0)$, non supera $\alpha^2\Phi$. Vale evidentemente la formula

$$\varepsilon_2(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{k}{4\pi k + 1}\right)^2 \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma \int \varphi(x, y, z)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma,$$

della quale il secondo membro contiene, come prima, la funzione incognita φ. Intanto la (4) si può meglio scrivere, secondo (a),

$$(5)\qquad \varphi(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon_2(x_0, y_0, z_0) = -\frac{W(x_0, y_0, z_0)}{4\pi k + 1} - \frac{k}{4\pi k + 1}\int \frac{W(x, y, z)}{4\pi k + 1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma.$$

In una terza determinazione, data dalla formula

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon_3(x_0, y_0, z_0) = -\frac{W(x_0, y_0, z_0)}{4\pi k + 1} + \frac{k}{4\pi k + 1}\int [\varphi(x, y, z) + \varepsilon_2(x, y, z)]\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma,$$

la quale può anche, secondo (5), scriversi

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon_2(x_0, y_0, z_0) = -\frac{W(x_0, y_0, z_0)}{4\pi k + 1} - \frac{k}{4\pi k + 1}\int \frac{W(x, y, z)}{4\pi k + 1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma - \left(\frac{k}{4\pi k + 1}\right)^2 \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma \int \frac{W(x, y, z)}{4\pi k + 1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma,$$

il secondo membro sarà noto, e l'errore

$$|\varepsilon_3| = \left(\frac{k}{4\pi k+1}\right)^3 \left| \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma \int \varphi(x\,,y\,,z) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma \right|$$

non sarà superiore alla grandezza $\alpha^3\Phi$.

Continuando noi otteniamo lo sviluppo di $\varphi(x_0\,,y_0\,,z_0)$ in una serie che, come è chiaro, converge uniformemente e assolutamente in S. Per ottenere il termine ν^{mo} di questa serie, basterà moltiplicare il termine $(\nu-1)^{mo}$ per $\dfrac{k}{4\pi k+1} \dfrac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma$ e integrare a tutta la superficie σ.

L'errore $|\varepsilon_\nu|$ ottenuto da $|\varepsilon_{\nu-1}|$ collo stesso processo, non supererà $\alpha^\nu\Phi$. Tali errori tendono evidentemente a zero quando ν va crescendo.

Sulla praticità del presente metodo noi possiamo dire che, in questo come in altri problemi analoghi (i quali sono, per verità, molto generali), bisogna ordinariamente contentarsi di una soluzione *formale*, la quale, in qualche fortunato caso pratico, può diventare anche pratica. Diciamo che la nostra soluzione è formale, perchè, sebbene sia rigorosa e facile a intendersi, si presenta tuttavia troppo irta di simboli per essere una buona ed effettiva soluzione d'un problema fisico.

Cristallografia. — *Baritina di Traversella e di Brosso.* Nota di Luigi Colomba [1], presentata dal Socio G. Spezia.

In varie mie gite compiute, dal 1902 in poi, ai giacimenti di Brosso e Traversella, raccolsi numerosi esemplari che mi permisero di compiere su talune delle specie minerali proprie dei detti giacimenti e non ancora sottoposte a studî completi, alcune osservazioni di indole specialmente cristallografica.

I primi risultati di queste mie ricerche riguardanti alcuni interessanti cristalli di scheelite, vennero da me pubblicati [2] alcuni mesi or sono; nella presente Nota mi occuperò della baritina la cui presenza in taluni dei sopraindicati giacimenti venne già segnalata da G. Strüver [3].

(1) Lavoro compiuto nell'Istituto Mineralogico della R. Università di Torino.

(2) *Sulla scheelite di Traversella*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XV, 1° sem. 1906, pag. 281.

(3) *Studi sulla Mineralogia Italiana: Pirite del Piemonte e dell'Elba*, Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, XXVI, estratto.