ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Matematica. — *Le superficie di Serret negli spazi a curvatura costante.* Nota del prof. UMBERTO SBRANA, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Consideriamo, nello spazio Ω_3 a curvatura costante ed eguale a K_0, quelle superficie immaginarie caratterizzate dalla proprietà di avere un solo sistema di linee di curvatura. Nel caso dello spazio euclideo S_3 queste superficie sono state studiate; esse sono integrali della nota equazione:

$$(I)\quad 4(rt-s^2)(1+p^2+q^2)-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2=0,$$

integrata per la prima volta da Monge.

Nel caso di Ω_3 basta fare la nota rappresentazione conforme di Ω_3 stesso su S_3, per caratterizzare le superficie suddette. Poichè alle linee di curvatura di una superficie Σ di Ω_3 corrispondono le linee di curvatura sulla trasformata S di S_3, così se Σ ha un solo sistema di tali linee, altrettanto accade di S. Le superficie a linee di curvatura coincidenti di Ω_3 sono dunque quelle che hanno per immagini superficie della stessa specie di S_3.

Fra queste superficie di Ω_3 è particolarmente interessante il considerare quelle che sono a curvatura relativa costante, eguale a k_0. Esse sono manifestamente le analoghe di quelle dell' S_3 trovate da Serret, e le chiameremo perciò le superficie di Serret degli spazi a curvatura costante.

Scegliamo ora per rappresentazione conforme di Ω_3 su S_3 quella che fa corrispondere ad un punto P di Ω_3, avente le coordinate di Weierstrass x_0, x_1, x_2, x_3, quel punto P′ di S_3 le cui coordinate x, y, z sono quelle di Riemann del primo. Sussistono allora le formole [1]:

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}
&x=\frac{1}{2}\frac{x_1}{x_0\pm1}\,,\quad y=\frac{1}{2}\frac{x_2}{x_0\pm1}\,,\quad z=\frac{1}{2}\frac{x_3}{x_0\pm1}\,,\\
&x_0=\frac{\frac{1}{4}\mp\sum x^2}{\pm\frac{1}{4}+\sum x^2}\,,\quad x_1=\frac{x}{\sum x^2\pm\frac{1}{4}}\,,\\
&x_2=\frac{y}{\sum x^2\pm\frac{1}{4}}\,,\quad x_3=\frac{z}{\sum x^2\pm\frac{1}{4}}
\end{aligned}\right.$$

nelle quali è $\Sigma x^2=x^2+y^2+z^2$, e si devono prendere i segni superiori,

[1] Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, Vol. I, pag. 443.

o gli inferiori a seconda che Ω_3 è ellittico, od iperbolico, cioè a seconda che $K_0 = \frac{1}{R^2}$, o che $K_0 = -\frac{1}{R^2}$, con R reale.

Con questa rappresentazione, le immagini delle superficie di Serret di Ω_3 sono integrali comuni alla (I) e all'altra ([1]):

$$\text{(II)}\qquad \lambda^2 \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} + \lambda\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z} - p\frac{\partial\lambda}{\partial x} - q\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^2} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z} - p\frac{\partial\lambda}{\partial x} - q\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2}{1+p^2+q^2} = k_0,$$

ove è: $\lambda = \frac{\sum x^2 \pm \frac{1}{4}}{R}$, il segno dovendosi scegliere in corrispondenza con quello scelto per le (a).

Ora faremo vedere che si possono esprimere le coordinate x, y, z di un punto di una di queste superficie immagini in funzione nota di due parametri u, v; con ciò otterremo in termini finiti l'integrale generale, con una funzione arbitraria del sistema costituito dalle (I), (II).

2. Diremo *curva minima* di Ω_3 una curva, le coordinate x'_i di un cui punto soddisfino, nel caso di $K_0 = \frac{1}{R^2}$, all'equazione:

$$dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0,$$

nel caso di $K_0 = -\frac{1}{R^2}$, all'altra:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 = 0.$$

Vediamo ora come si possa trovare la rappresentazione parametrica di queste curve. Basta perciò osservare che la rappresentazione del § 1 a curve minime di Ω_3 fa corrispondere curve della stessa specie di S_3. Ora la più generale curva minima di S_3, escluse le rette, si ottiene esprimendo con le seguenti le coordinate x, y, z di un suo punto per il parametro u:

$$\text{(1)}\qquad x = \frac{1}{2}(1-u^2)\varphi'' + u\varphi' - \varphi \quad , \quad y = \frac{i}{2}(1+u^2)\varphi'' - iu\varphi' + i\varphi$$
$$z = u\varphi'' - \varphi',$$

essendo $\varphi = \varphi(u)$ una funzione arbitraria di u. Avremo dunque che la più generale curva minima di Ω_3, escluse sempre le rette ([2]), si otterrà ponendo

[1] Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Vol. 1°, pag. 515.

[2] Per retta minima di Ω_3 deve intendersi una curva minima, piana. È facile vedere, per mezzo della (a), che queste rette sono tutte e sole quelle che hanno per immagini nell' S_3 rette minime.

per x, y, z nelle seconde delle (a) i valori (1), con che troveremo:

$$
(2)\quad
\begin{gathered}
x'_0 = \frac{\frac{1}{4} \mp \varphi'^2 \pm 2\varphi\varphi''}{\pm\frac{1}{4} + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''}, \quad x'_1 = \frac{\frac{1}{2}(1-u^2)\varphi'' + u\varphi' - \varphi}{\pm\frac{1}{4} + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''}, \\
x'_2 = \frac{\frac{i}{2}(1+u^2)\varphi'' - iu\varphi' + i\varphi}{\pm\frac{1}{4} + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''}, \quad x'_3 = \frac{u\varphi'' - \varphi'}{\pm\frac{1}{4} + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''},
\end{gathered}
$$

il segno superiore avendosi per $K_0 = \frac{1}{R^2}$, l'inferiore per $K_0 = -\frac{1}{R^2}$.

3. Dimostreremo ora, nel caso dello spazio ellittico, che l'inviluppo di una semplice infinità di sfere di raggio ridotto, costante ed eguale ad $R \operatorname{tang} \frac{w}{R}$, i cui centri sieno i punti di una curva minima C, che non sia una retta, è costituito di due falde Σ, Σ_1 che sono due superficie di Serret la cui curvatura relativa k_0 è uguale ad $\dfrac{1}{R^2 \operatorname{tang}^2 \frac{w}{R}}$.

Sieno infatti x'_i le coordinate di un punto M di C, funzioni del parametro u. Le coordinate x_i dei punti della sfera di raggio ridotto $R \operatorname{tang} \frac{w}{R}$, avente il centro in M, soddisferanno all'equazione:

$$
(3)\qquad x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3 = \cos\frac{w}{R}.
$$

Per avere l'inviluppo di questa semplice infinità di sfere, dovremo associare alla (3) l'altra:

$$
(3)^\star\qquad \sum_i x_i \frac{dx'_i}{du} = 0
$$

che si ottiene dalla (3) derivandola rispetto ad u. È facile vedere che si soddisfa alle (3), (3)* prendendo [1]:

$$
(4)\qquad x_i = x'_i \cos\frac{w}{R} + \left(\frac{\frac{d^2 x'_i}{du^2}}{\Omega} + v\frac{dx'_i}{du}\right) \operatorname{sen}\frac{w}{R},
$$

[1] Affinchè le (4) abbiano un significato è necessario che sia $\Omega \neq 0$. Non può però essere $\Omega = 0$, poichè in tale ipotesi, siccome in fine del § 3 si trova che il quadrato del wronskiano delle x'_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ è eguale a $-\Omega^6$, così si avrebbe che questo determinante sarebbe nullo, che quindi fra le x'_i sussisterebbe una relazione lineare, omogenea, ossia che C sarebbe una retta, ciò che si è escluso.

avendo indicato con v un nuovo parametro, ed essendo:

$$\Omega = \pm \sqrt{\sum \left(\frac{d^2 x'_i}{du^2}\right)^2}.$$

Corrispondentemente alle due determinazioni di segno per Ω si hanno le due falde Σ, Σ_1 dell' inviluppo.

Ora non rimangono che da calcolare i coefficienti delle due forme fondamentali di Σ e di Σ_1. Dalle (4), tenendo conto delle relazioni:

$$(5) \quad \sum_i \left(\frac{dx'_i}{du}\right)^2 = \sum_i \frac{dx'_i}{du}\frac{d^2x'_i}{du^2} = 0\ , \ \sum \frac{d^3x'_i}{du^3}\frac{dx'_i}{du} = -\sum\left(\frac{d^2x'_i}{du^2}\right)^2 = -\Omega^2,$$

si traggono tanto per Σ, quanto per Σ_1, le seguenti:

$$(6) \qquad G = D'' = 0 \quad ; \quad F = -R^2\Omega \operatorname{sen}^2\frac{w}{R}.$$

Calcolando per mezzo delle (4), e tenendo conto delle (5) e delle (6), D', si trova con semplici riduzioni:

$$D' = \frac{R \operatorname{sen}\dfrac{w}{R}\cos\dfrac{w}{R}}{i\Omega^2}\begin{vmatrix} x'_0 & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ \dfrac{dx'_0}{du} & \dfrac{dx'_1}{du} & \dfrac{dx'_2}{du} & \dfrac{dx'_3}{du} \\ \dfrac{d^2x'_0}{du^2} & \dfrac{d^2x'_1}{du^2} & \dfrac{d^2x'_2}{du^2} & \dfrac{d^2x'_3}{du^2} \\ \dfrac{d^3x'_0}{du^3} & \dfrac{d^3x'_1}{du^3} & \dfrac{d^3x'_2}{du^3} & \dfrac{d^3x'_3}{du^3}\end{vmatrix}.$$

E poichè il quadrato del determinante al secondo membro di quest' ultima si trova essere eguale a $-\Omega^6$, così tenendo presenti le (6), deduciamo subito che:

$$k_0 = \frac{D'^2}{F^2} = \frac{1}{R^2 \operatorname{tang}^2\dfrac{w}{R}}.$$

Le (6) e quest' ultima provano quanto abbiamo asserito in principio del paragrafo.

4. Anche nel caso dello spazio iperbolico presa una curva minima C, che non sia una retta, essendo x'_i le coordinate di un suo punto funzioni del parametro u, si può considerare l' inviluppo della semplice infinità di sfere aventi i centri nei punti di C, e raggio ridotto costante, eguale ad $R \operatorname{tangh}\frac{w}{R}$. Si trova così che le coordinate x_i di un punto di questo invi-

luppo sono espresse in funzione dei due parametri u, v dalle formole [1]:

$$x_i = x'_i \cosh\frac{w}{R} + \left(\frac{\frac{d^2x'_i}{du^2}}{\Omega} + v\,\frac{dx'_i}{du}\right)\operatorname{senh}\frac{w}{R}, \tag{7}$$

con

$$\Omega = \pm\sqrt{\sum_i \left(\frac{d^2x'_i}{du^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2x'_0}{du^2}\right)^2},$$

le quali a seconda che si prende il segno superiore, o l'inferiore per Ω, ci danno i punti di una, o dell'altra delle due falde Σ, Σ_1 da cui l'inviluppo stesso è costituito. Si trova poi che Σ e Σ_1 sono due superficie di Serret aventi la curvatura relativa k_0 eguale a $\dfrac{1}{R^2 \operatorname{tangh}^2 \frac{w}{R}}$.

Concludendo potremo dire dunque che:

L'integrale generale del sistema costituito dalla (I) *e dalla* (II), *nella quale ultima si prenda* $\lambda = \dfrac{\sum x^2 + \frac{1}{4}}{R}$ *e* $k_0 = \dfrac{1}{R^2 \operatorname{tang}^2 \frac{w}{R}}$ *è dato dalle formole*:

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{x_1}{x_0+1}\;,\quad y = \frac{1}{2}\,\frac{x_2}{x_0+1}\;,\quad z = \frac{1}{2}\,\frac{x_3}{x_0+1},$$

ove per le x_i *si devono mettere i valori che si ottengono dalle* (4), *ponendovi per le* x'_i *le espressioni corrispondenti ai segni superiori nelle* (2). *Nel caso invece in cui nella* (II) *si faccia* $k_0 = \dfrac{1}{R^2 \operatorname{tangh}^2 \frac{w}{R}}$, $\lambda = \dfrac{\sum x^2 - \frac{1}{4}}{R}$, *l'integrale generale del sistema stesso è dato dalle seguenti*:

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{x_1}{x_0-1}\;,\quad y = \frac{1}{2}\,\frac{x_2}{x_0-1}\;,\quad z = \frac{1}{2}\,\frac{x_3}{x_0-1}$$

nelle quali le x_i *hanno i valori che risultano dalle* (7), *quando vi si pongano per le* x'_i *le espressioni che si ottengono dalle* (2), *scegliendo i segni inferiori.*

Sono poi manifestamente in ogni caso integrali del sistema (I), (II) *le sfere.*

[1] Che non possa essere $\Omega = 0$ si dimostra in modo analogo a quello usato nella nota del § 3.

Osserviamo infine che sarebbe facile dimostrare, come è stato fatto per le superficie di Serret dello spazio ordinario [1], che la trasformazione di Bäcklund è applicabile alle superficie di Serret degli spazi a curvatura costante, e conduce a superficie della stessa specie. Si verrebbe a stabilire così un metodo di trasformazione per gli integrali comuni alle (I), (II).

Matematica. — *Ricerche sulla teoria delle funzioni automorfe.* Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Fisica. — *Ricerche sopra la conducibilità termica a temperature ordinarie e a basse temperature.* Nota del dott. PIETRO MACCHIA, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Cristallografia. — *Osservazioni cristallografiche su alcuni minerali di Brosso e Traversella.* Nota di LUIGI COLOMBA, presentata dal Socio STRUEVER.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sull'acido piombico colloidale* [2]. Nota di I. BELLUCCI e N. PARRAVANO, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

Tra i colloidi inorganici sono discretamente numerosi gli idrati acidi o basici dei vari elementi. Sono noti infatti allo stato colloidale gli idrati di Fe, Al, Cr, Si, Ti, Zr, Sn, Mo, W, quasi tutti preparati per la prima volta dal Graham e taluni riottenuti in seguito da altri, anche con metodi diversi.

Fra gli idrati che derivano dagli elementi del quarto gruppo del sistema periodico esiste, come vedesi, una lacuna nei riguardi del piombo. L'acido piombico PbO^2 aq è infatti finora sconosciuto come colloide; ma per le sue relazioni, specie con gli omologhi silicico e stannico, poteva ben

[1] Vedere la mia Memoria: *Sulle trasformazioni delle superficie a linee di curvatura coincidenti*. Memorie della Societa italiana delle Scienze (detta dei XL), serie 3ª, tomo XIV, pag. 11.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Roma.