ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Chimica. — *Applicazione del metodo del Rutherford all'isolamento dell'emanazione contenuta nei soffioni boraciferi.* Nota del Socio R. NASINI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sull'estensione del metodo d'integrazione di Riemann all'equazioni lineari d'ordine n con due variabili indipendenti.* Nota del dott. P. BURGATTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

In questa Nota mi propongo di esporre per sommi capi l'estensione del metodo d'integrazione di Riemann all'equazioni differenziali lineari dell'ennesimo ordine con due variabili indipendenti a caratteristiche reali, considerate sotto la loro forma più generale; ponendo in luce i punti essenziali che il successo del metodo assicurano, e tralasciando qualche dimostrazione e taluni calcoli, che, richiedendo lungo discorso e estesi sviluppi, mi obbligherebbero a oltrepassare i limiti dello spazio che qui mi è concesso. Spero tuttavia che la concisione non sia per nuocere alla chiarezza.

Degli autori che prima di me hanno studiato quest'argomento ricorderò il sig. Delassus [1], che ha considerato il caso in cui tutte le caratteristiche si riducano a due sole reali e distinte, e il sig. Holmgren [2], che ha preso in considerazione le equazioni del terzo ordine sotto una forma ridotta.

1. Sia data un'equazione lineare d'ordine n con due variabili indipendenti rappresentata da

$$(0)\qquad \sum_{s=0}^{n}\binom{s}{n} a_{0s}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-s}\,\partial y^s}+\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s} a_{1s}\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1-s}\,\partial y^s}+\cdots+a_{n0}\,z=0,$$

ove le a_{rs} sono funzioni di x e y, continue in una regione R del piano insieme alle loro successive derivate fino a quelle che qui occorre considerare. L'equazione differenziale delle caratteristiche è

$$(1)\qquad \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s} a_{0s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{n-s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{s}=0;$$

[1] Annales de l'École Normale, 1895.

[2] Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, K. Svenska Vetenskaps-Akademien, Stockholm, Band I, 1904.

noi supporremo che esse siano tutte reali e distinte nella regione R del piano. Lungo una di esse, essendo $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$, si ha ancora

$$(1') \qquad \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} a_{0s}\, dy^{n-s}\, dx^s = 0 .$$

Fissato un punto $P(x_0, y_0)$ in R, sia $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$ una direzione qualunque uscente da esso; potremo determinarne un'altra $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ tale che sia

$$(2) \qquad \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} \left(a_{0r} \frac{dy}{ds} - a_{0,r+1} \frac{dx}{ds}\right) \left(\frac{dy}{dt}\right)^{n-1-r} \left(\frac{dx}{dt}\right)^r = 0 ,$$

supposto per comodo $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$ e $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1$. Anzi di queste direzioni ne esisteranno $n-1$; ma noi fisseremo l'attenzione sempre sopra una di esse, la scelta essendo indifferente per ciò che segue. Se $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$ è una direzione caratteristica, si vede subito, senza entrare in particolare, che fra le $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ soddisfacenti alla (2) ne esiste almeno una coincidente con quella.

Osservando ora che la (2) si può scrivere sotto la forma

$$\begin{vmatrix} a_{00} \frac{dy}{ds} - a_{01} \frac{dx}{ds} & \binom{n-1}{1} \left(a_{01} \frac{dy}{ds} - a_{02} \frac{dx}{ds}\right) \cdots\cdots & a_{0n-1} \frac{dy}{ds} - a_{0n} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \quad 0 \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & \frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots\cdots & \frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \end{vmatrix} = 0 ,$$

si trae subito

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda_1 \frac{dx}{dt} = a_{00} \frac{dy}{ds} - a_{01} \frac{dx}{ds} \\ \lambda_2 \frac{dx}{dt} + \lambda_1 \frac{dy}{dt} = \binom{n-1}{1} \left(a_{01} \frac{dy}{ds} - a_{02} \frac{dx}{ds}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{r+1} \frac{dx}{dt} + \lambda_r \frac{dy}{dt} = \binom{n-1}{r} \left(a_{0r} \frac{dy}{ds} - a_{0r+1} \frac{dx}{ds}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n-1} \frac{dx}{dt} = a_{0n-1} \frac{dy}{ds} - a_{0n} \frac{dx}{ds} , \end{cases}$$

ove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ sono certi moltiplicatori, determinati per ogni determinata direzione $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ soddisfacente alla (2). Quando $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$ rappresentano i coseni di direzione della tangente a una curva passante per P, si dirà che $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ è una direzione *cotangente* in P alla curva stessa; fra quelle due direzioni sussistono le relazioni (3). Se la curva è una caratteristica esiste una direzione cotangente che coincide colla tangente alla caratteristica stessa; in tal caso le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ sono radici di un sistema d'equazioni algebriche i cui coefficienti sono formati colle a_{0r}.

Introduciamo nelle (3) i coseni della normale alla curva in P, ponendo

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dn}, \quad \frac{dx}{ds} = -\frac{dy}{dn};$$

poi moltiplichiamole ordinatamente per $\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-2}\,\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}$, e sommiamo. Allora posto

$$\mathrm{H}(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} a_{0s} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1-s}\,\partial y^s}, \quad \mathrm{K}(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} a_{0s+1} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1-s}\,\partial y^s},$$

si ottiene

$$\sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-s-1}\,\partial y^{s-1}}\right) = \mathrm{H}(z)\frac{dx}{dn} + \mathrm{K}(z)\frac{dy}{dn}; \tag{4}$$

formula fondamentale per ciò che segue. Il primo membro è una combinazione lineare di derivate lungo la cotangente.

2. Sia ancora $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ un punto della regione R, e $\mathrm{PC}_1, \mathrm{PC}_2, \ldots, \mathrm{PC}_n$ le n caratteristiche uscenti da P e disposte in guisa che, facendo ruotare nel senso positivo la tangente positiva in P a PC_1, essa vada successivamente a sovrapporsi alle tangenti positive condotte per P a $\mathrm{PC}_2, \ldots, \mathrm{PC}_n$. Diremo che PC_1 e PC_n sono le caratteristiche estreme, $\mathrm{PC}_2, \ldots, \mathrm{PC}_{n-2}$ le intermedie, e $\mathrm{PC}_s, \mathrm{PC}_{s+1}$ due consecutive. Sussiste allora il teorema seguente:

Esiste una soluzione dell'equazione proposta continua insieme alle sue derivate fino a quelle dell'ordine $n-2$ (incluse) entro una cert'area compresa tra PC_1 e PC_n, tale che essa e le derivate ora menzionate acquistano sulle caratteristiche estreme valori dati a priori. Le derivate d'ordine $n-1$ sono discontinue attraverso le caratteristiche intermedie.

La frase « dare sopra una curva i valori di z e delle sue derivate fino a quelle d'un cert'ordine », che si usa qui per concisione, non vuol dire che tutti quei valori possono prendersi in modo arbitrario; ben si sa che tra loro devono essere verificate delle relazioni, per modo che basta dare i valori di una derivata per ogni ordine. S'intende poi che tutti i dati devono

essere concordanti in P, e soddisfare alle condizioni di continuità necessarie. La dimostrazione si può fare usando il metodo delle approssimazioni successive, supponendo vero il teorema per l'equazione d'ordine $n-1$.

3. Insieme all'equazione proposta $F(z)=0$ consideriamo la sua aggiunta

$$G(u)=(-1)^n\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{\partial^n(a_{0s}\,u)}{\partial x^{n-s}\,\partial y^s}+\cdots=0\,.$$

Si ha per cose note l'identità

$$uF(z)-zG(u)=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\,, \tag{5}$$

ove M e N sono espressioni che contengono u, z e le loro derivate fino a quelle d'ordine $n-1$. Esse possono scriversi sotto varie forme; qui conviene separare i termini contenenti le derivate d'ordine $n-1$, e ordinare il rimanente rispetto alle derivate di z. Allora con un poco d'attenzione è facile vedere che M e N si possono considerare sotto la forma seguente:

$$\left\{\begin{aligned}
M&=uH(z)-(-1)^n\,zH(u)+\sum_{i=0}^{n-2}\Delta_i^{(1)}(u)\frac{\partial^{n-2}z}{\partial x^i\,\partial y^{n-2-i}}+\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-3}\Delta_i^{(2)}(u)\frac{\partial^{n-3}z}{\partial x^i\,\partial y^{n-3-i}}+\cdots+\Delta_1^{(n-2)}(u)\frac{\partial z}{\partial x}+\\
&\qquad+\Delta_0^{(n-2)}(u)\frac{\partial z}{\partial y}+\Delta^{(n-2)}(u)\,.\,z\\
N&=uK(z)-(-1)^n\,zK(u)+\sum_{i=0}^{n-2}D_i^{(1)}(u)\frac{\partial^{n-2}z}{\partial x^i\,\partial y^{n-2-i}}+\cdots+\\
&\qquad+D_1^{(n-2)}(u)\frac{\partial z}{\partial x}+D_0^{(n-2)}(u)\frac{\partial z}{\partial y}+D^{(n-2)}(u)\,.\,z
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

ove in generale $\Delta^{(s)}(u)$ e $D^{(s)}(u)$ rappresentano espressioni lineari nelle derivate di u, dall'ordine zero all'ordine s.

Sia ora S un'area limitata dal contorno σ e tutta contenuta nella regione R. Se z e u sono rispettivamente due integrali di $F(z)=0$ e $G(u)=0$, applicando alla (5) un noto lemma, si ha

$$\int_\sigma\left(M\frac{dx}{dn}+N\frac{dy}{dn}\right)d\sigma=0\,; \qquad (n\equiv\text{normale interna}) \tag{7}$$

supposto, beninteso, soddisfatte le necessarie condizioni di continuità.

Supponiamo che, preso un punto $P(x_0\,,y_0)$ di S, le caratteristiche uscenti da esso siano disposte come si è detto al § 2 (e ciò per ogni punto di S). Sia C_s il solo punto in cui la PC_s incontra σ. Avremo un triangolo curvilineo PC_1C_n composto dei triangoli curvilinei PC_1C_2, PC_2C_3, . . . ,

$PC_{n-1}C_n$. Considerando il contorno PC_sC_{s+1}, percorso nel senso indicato dalle lettere, porremo arco $PC_s = t_s$, arco $C_sC_{s+1} = \sigma_s$, arco $PC_{s+1} = t_{s+1}$; e allora per la (7) avremo

$$\int_{PC_s}\left(M\frac{dx}{dn_s}+N\frac{dy}{dn_s}\right)dt_s-\int_{C_{s+1}P}\left(M\frac{dx}{dn_{s+1}}+N\frac{dy}{dn_{s+1}}\right)dt_{s+1}+$$
$$+\int_{\sigma_s}\left(M\frac{dx}{dn}+N\frac{dy}{dn}\right)d\sigma_s=0,$$

ove il significato dei simboli è ben chiaro. Sommando queste formule rispetto all'indice s da $s=1$ a $n-1$, si ottiene:

$$(8)\quad \sum_{s=1}^{n-1}\int_{PC_s}\left(M\frac{dx}{dn_s}+N\frac{dy}{dn_s}\right)dt_s-\sum_{s=1}^{n-1}\int_{C_{s+1}P}\left(M\frac{dx}{dn_{s+1}}+N\frac{dy}{dn_{s+1}}\right)dt_{s+1}=$$
$$=-\int_{\sigma}\left(M\frac{dx}{dn}+N\frac{dy}{dn}\right)d\sigma,$$

ove σ è percorso nel senso C_1C_n. L'integrale esteso a $PC_s\,(s \neq 1, n)$ nella prima sommatoria sarebbe evidentemente uguale all'integrale esteso allo stesso arco nella seconda sommatoria qualora le derivate di u e z dall'ordine zero all'ordine $n-1$, le quali compariscono in M e N, fossero continue attraverso PC_s. Per la z supporremo che ciò avvenga, ma non per la u; inquantochè, per raggiungere la mèta che abbiamo in vista, dobbiamo supporre che u sia una soluzione dell'equazione aggiunta rispondente al teorema del § 2; ritenendo per ora arbitrariamente scelti i dati sulle caratteristiche estreme. In questa ipotesi le derivate d'ordine $n-1$ di u sono discontinue attraverso le caratteristiche intermedie; perciò l'uguaglianza degli integrali di cui sopra non è evidente. Tuttavia sussiste ancora. Infatti, l'espressione

$$M\frac{dx}{dn_s}+N\frac{dy}{dn_s}=u\left(H(z)\frac{dx}{dn_s}+K(z)\frac{dy}{dn_s}\right)-(-1)^n\left(H(n)\frac{dx}{dn_s}+K(u)\frac{dy}{dn_s}\right)$$
$$+M'\frac{dx}{dn_s}+N'\frac{dy}{dn_s}\qquad\text{(vedi le (6))}$$

si può trasformare mediante la formula (4); osservando però, e questo è l'importante (vedi § 1), che il simbolo $\frac{d\varphi}{dt_s}$ prende il significato di derivata lungo la caratteristica PC_s, giacchè $\frac{dx}{dn_s}, \frac{dy}{dn_s}$ si riferiscono a questa carat-

teristica. Si ha allora facilmente

$$\mathrm{M}\frac{dx}{dn_s}+\mathrm{N}\frac{dy}{dn_s}=\sum_{r=1}^{n-1}\frac{d}{dt_s}\lambda_r^{(s)}\left(u\frac{d^{n-2}z}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{r-1}}-(-1)^n z\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{r-1}}\right)-$$
$$-\sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{d(u\lambda_r^{(s)})}{dt_s}\frac{\partial^{n-2}z}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{r-1}}-(-1)^n\frac{dz\lambda_r^{(s)}}{dt_s}\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{r-1}}\right)$$
$$+\mathrm{M}'\frac{dx}{dn_s}+\mathrm{N}'\frac{dy}{dn_s};$$

e quindi

$$\int_{\mathrm{PC}_s}\left(\mathrm{M}\frac{dx}{dn_s}+\mathrm{N}\frac{dy}{dn_s}\right)dt_s=$$

(9)
$$=\sum_{r=1}^{n-1}\left|\lambda_r^{(s)}\left(u\frac{\partial^{n-2}z}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{r-1}}-(-1)^n z\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{r-1}}\right)\right|_{\mathrm{P}}^{\mathrm{C}_s}+\int_{\mathrm{PC}_s}\Phi_s\,dt_s,$$

ove Φ_s non contiene più derivate d'ordine $n-1$.

Questa formula dimostra l'asserto. Si conclude dunque che nella (8) gl'integrali che compariscono nel primo membro si elidono due a due, e restano solamente il primo integrale della prima sommatoria e l'ultimo della seconda; onde si ha

$$\sum_{r=1}^{n-1}\left|\lambda_r'\left(u\frac{\partial^{n-2}z}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{r-1}}-(-1)^n z\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{r-1}}\right)\right|_{\mathrm{P}}^{\mathrm{C}_1}+$$

(10)
$$+\sum_{r=1}^{n-1}\left|\lambda_r^{(n)}\left(u\frac{\partial^{n-2}z}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{r-1}}-(-1)^n z\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{r-1}}\right)\right|_{\mathrm{P}}^{\mathrm{C}_n}=$$
$$-\int_{\mathrm{PC}_1}\Phi_1\,dt_1-\int_{\mathrm{PC}_n}\Phi_n\,dt_n-\int_\sigma\left(\mathrm{M}\frac{dx}{dn}+\mathrm{N}\frac{dy}{dn}\right)d\sigma.$$

Data la u come abbiamo detto, e dati i valori di z e delle sue derivate fino a quelle dell'ordine $n-1$ sopra il contorno σ, l'integrale esteso a σ si può considerare come noto. Per conseguenza se fosse possibile di scegliere i valori iniziali di u e sue derivate per modo che risultasse $\Phi_1=0$ lungo PC_1 e $\Phi_n=0$ lungo PC_n, la (10) fornirebbe un'equazione d'ordine $n-2$, cui dovrebbe soddisfare la z in S; e la risoluzione del problema di Cauchy per l'equazioni d'ordine n verrebbe così ridotta, col metodo di Riemann, alla risoluzione dello stesso problema per l'equazione d'ordine $n-2$. Ma osservando le espressioni di Φ_1, M' e N', e riflettendo che $\frac{du}{dt_1}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt_1}+$ $+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt_1}$, è facile vedere che alla Φ_1 può darsi la forma

$$\Phi_1=\sum_{i=0}^{n-2}\frac{\partial^{n-2}z}{\partial x^i\partial y^{n-2-i}}\mathrm{Q}_i^{(1)}(u)+\sum_{i=0}^{n-3}\frac{\partial^{n-3}z}{\partial x^i\partial y^{n-3-i}}\mathrm{Q}_i^{(2)}(u)+$$
$$+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{Q}_1^{(n-2)}(u)+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{Q}_0^{(n-2)}(u)+z\mathrm{Q}^{(n-2)}(u),$$

ove $Q^{(s)}(u)$ è un'espressione lineare in u d'ordine s. Ora u è una soluzione dell'aggiunta rispondente al teorema del § 2, e la scelta dei valori di u e delle sue derivate fino a quelle d'ordine $n-2$ è ancora in nostro arbitrio. Perchè risultasse $\Phi_1 = 0$ bisognerebbe scegliere quei valori in guisa che fosse $Q_i^{(s)}(u) = 0$ per ogni valore dei due indici; il che è evidentemente impossibile in generale, perchè il numero delle equazioni $Q_i^{(s)}(u) = 0$ è esuberante. Per superare questa difficoltà bisogna modificare la formula (10) mediante l'artificio che segue.

Indichiamo con K_{hi} certe espressioni da determinarsi, non contenenti la z e le sue derivate, bensì la u e le sue derivate. Allora considerando l'espressione

$$\frac{d}{dt_1}\left\{\sum_{i=0}^{h} u K_{hi} \frac{\partial^h z}{\partial x^i \, \partial y^{h-i}}\right\},$$

è facile dedurre l'identità seguente:

$$\sum_{i=0}^{h}\left| u K_{hi} \frac{\partial^h z}{\partial x^i \, \partial y^{h-i}}\right|_{P}^{C_1} = \int_{PC_1} u K_{hh} \frac{\partial^{h+1} z}{\partial x^{h+1}} \frac{dx}{dt_1} dt_1 +$$

$$+ \sum_{i=0}^{h} \int_{PC_1} \frac{d K_{hi} u}{dt_1} \frac{\partial^h z}{\partial x^i \, \partial y^{h-i}} dt_1 + \qquad (K_{h,-1} = 0)$$

$$+ \sum_{i=0}^{h} \int_{PC_1} u \left(K_{hi-1} \frac{dx}{dt_1} - K_{hi} \frac{dy}{dt_1}\right) \frac{\partial^{h+1} z}{\partial x^i \, \partial y^{h+1-i}} dt_1,$$

nella quale potremo fare $h = 0, 1, 2 \ldots n-3$. Da esse si ottengono altrettante identità sostituendo t_n a t_1, e il simbolo K'_{hi} a K_{hi}. Se si sommano tutte queste identità con la (10), si viene a sostituire alla (10) una formula della stessa natura, ma molto più generale, perchè in essa compariranno le indeterminate K_{hi} e K'_{hi}, rispettivamente in numero di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Non scriveremo per disteso questa formula, perchè è complicata, e l'averla sott'occhio non agevolerebbe di molto i nostri ragionamenti. Pel nostro scopo basta osservare che nella nuova formula tutta l'espressione che deve essere integrata lungo PC_1 è ancora lineare (com'era la Φ_1) rispetto a z e alle sue derivate fino all'ordine $n-2$, e che i coefficienti di esse sono lineari rispetto alle quantità uK_{hi}. Perciò uguagliando a zero quei coefficienti, ad eccezione di quelli appartenenti a $\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}, \frac{\partial^{n-3} z}{\partial x^{n-3}}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x}, z$, si ottengono $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ equazioni atte a determinare le K_{hi}. Lo stesso dicasi per l'espressione che deve essere integrata lungo PC_n. Si vede dunque che in ultima analisi avremo una formula, che indicheremo con (F), il cui primo membro sarà lineare dell'ordine $n-2$ rispetto alla z, pensata funzione del

punto P; e il 2° membro, oltre l'integrale esteso a σ che comparisce nella (10), conterrà due integrali del tipo

$$\int_{PC_1} \Psi_1 \, dt \quad , \quad \int_{PC_n} \Psi_n \, dt_n ,$$

con Ψ_1 e Ψ_n della forma

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial^i z}{\partial x_i} R_{n-1-i}(u) + z T_{n-2}(u)$$

$$\Psi_n = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial^i z}{\partial x^i} R'_{n-1-i}(u) + z T'_{n-2}(u) ,$$

ove R_{n-1-i}, R'_{n-1-i}, T'_{n-2}, T'_{n-2} sono espressioni lineari rispetto a u e sue derivate dell'ordine indicato dall'indice. Se ora si suppone d'aver scelto sopra PC_1 e PC_n i valori di u e delle sue derivate fino a quelle dell'ordine $n-2$ in guisa che lungo PC_1 risulti

$$R_{n-1-i}(u) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2) \quad , \quad T_{n-2}(u) = 0 ,$$

e lungo PC_n

$$R'_{n-1-i}(u) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-2) \quad , \quad T'_{n-2}(u) = 0 ,$$

nel secondo membro della (F) resterà soltanto l'integrale esteso a σ. Quelle equazioni di condizione sono rispettivamente in numero di $n-1$; ossia tante quante sono le derivate

$$\frac{\partial^{n-2} u}{\partial x^{n-2}}, \frac{\partial^{n-3} u}{\partial x^{n-3}}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x}, u ,$$

i cui valori sopra PC_1 e PC_n, in virtù del teorema del § 2, erano ancora in nostro arbitrio.

Concludiamo dunque che il metodo di Riemann, applicato nella maniera accennata, riduce la risoluzione del problema di Cauchy per un'equazione d'ordine n alla risoluzione dello stesso problema per un'equazione d'ordine $n-2$; alla quale poi si dovrà riapplicare il metodo; e così via, fino a che si giungerà alla z cercata, o ad un'equazione lineare del primo ordine per la quale il problema di Cauchy si sa risolvere.

Naturalmente molte e importanti questioni complementari restano da studiare; i risultati precedenti non sono che un primo passo verso una trattazione generale e sistematica del difficile problema.