ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

diluendole a volumi noti fino al limite di visione dello spettro; l'inconveniente che si presenta nel nostro caso si è che ad una certa diluizione il solfato manganico si idrolizza e la soluzione per quanto diluita s'intorbida leggermente. Noi non intendiamo per ora che accennare alla possibilità che il metodo serva in qualche caso analitico dove si presentino altrimenti delle difficoltà o dove per es. non si possano applicare i metodi colorimetrici per la presenza di più sostanze colorate in soluzione. Studieremo più esattamente la cosa in altra più opportuna occasione.

Oltre alle ossidazioni descritte tentammo anche quelle di molte sostanze organiche colla speranza di qualche buon esito, ma, al contrario, senza ottenere risultati confortanti, ragione per cui finora, come applicazione pratica dell'azione dei fluoro-ioni nelle ossidazioni elettrolitiche, non resta che quella della preparazione dei persolfati secondo Müller, cui già accennammo in principio. L'azione specifica dei fluoro-ioni si rivela bensì in tutti i casi di ossidazione elettrolitica studiati, ma in modo molto notevole si rivela soltanto nel caso dei persolfati, in quello dei sali di cromo e forse ancora in quello dei iodati a periodati: in questi casi di ossidazione ben netta, in cui è una sola la reazione che si compie e si può compiere all'elettrodo, l'azione dei fluoro-ioni è anche ben netta e decisa; il potenziale all'elettrodo viene innalzato e questo porta necessariamente con sè una maggiore attività ossidante dell'ossigeno che si svolge. Le cose sembra non siano così semplici quando più reazioni si possono compiere all'elettrodo e diversi prodotti di ossidazione ne possono derivare; in questo caso l'unica cosa che ci sembra di poter concludere è che vien sempre favorita, almeno sensibilmente, la formazione del composto cui corrisponde il potenziale più elevato: pare però ancora che in questo caso l'azione dei fluoro-ioni non sia molto efficace e neanche molto costante; l'incostanza degli effetti è assai probabilmente connessa, come per l'ossidazione dei sali ammoniacali, all'incostanza del potenziale all'elettrodo.

Fisica. — *Ricerche sopra la conducibilità termica a temperature ordinarie e a basse temperature* [1]. Nota del dott. Pietro Macchia, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

1. Ben poco si conosce sulla conducibilità termica dei corpi a bassa temperatura. L'unico lavoro su quest'argomento, per quanto è a mia cognizione, è stato pubblicato da E. Giebe [2] nel 1903; egli trova per il bismuto un coefficiente di conducibilità interna a — 180°C. triplo all'incirca di quello

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Pisa, diretto dal prof. A. Battelli.

[2] E. Giebe, Ber. d. Deut. Phys. Ges. Heft. 2, 1903.

a $+18°$C. Il metodo che egli adopera, già usato da G. Grünesein [1], deriva da quello di Kirchhoff e Hansemann [2]; ma per quanto egli si sia fondato sopra una nuova base teorica, è costretto a dichiarare che rimane inesplicabile una discordanza notevole fra la teoria e i risultati sperimentali.

Io ho voluto intraprendere nuove ricerche su quest'argomento; e poichè mi sono occupato a lungo della via da seguire, in questa prima Nota esporrò i risultati di tale studio del metodo.

La via che si presenta più naturale pel nostro caso si è di confrontare la conducibilità a basse temperature con quella a temperatura ordinaria servendoci del metodo di Wiedemann e Franz [3], il quale è in sostanza il metodo di Despretz e di Langberg perfezionato. Questo metodo fu adoperato anche da Righi [4] per determinare il rapporto fra la conducibilità termica del bismuto in un campo magnetico e quella del bismuto stesso nelle condizioni ordinarie.

Ma nelle presenti esperienze, fatte necessariamente a temperature molto diverse, il calcolo non può essere così semplice come quello adoperato in tutte le esperienze precedenti. Infatti vediamo intanto brevemente come possiamo dedurre la conducibilità relativa secondo questo metodo.

2. Supponiamo che la sostanza in istudio sia sotto forma di asta cilindrica di diametro d abbastanza piccolo perchè possa ritenersi uguale la temperatura in ogni punto di una stessa sezione. Se riscaldiamo un estremo dell'asta ad una determinata temperatura sopra la temperatura ambiente, ammettendo valida per la conducibilità esterna la legge del raffreddamento di Newton, si ottiene, per lo stato stazionario delle temperature lungo l'asta, la nota equazione fondamentale di Fourier

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{4h}{kd}\,t, \tag{1}$$

dove t è l'eccesso sulla temperatura ambiente di una sezione dell'asta che è alla distanza x dall'estremo riscaldato; k e h sono rispettivamente i coefficienti di conducibilità interna ed esterna; e $\frac{4}{d}$ è il rapporto fra il perimetro della sezione e la sezione stessa.

L'integrale generale della (1), ponendo per brevità: $a = 2\sqrt{\frac{h}{kd}}$, è [5]

$$t = \mathrm{A}\,e^{ax} + \mathrm{B}\,e^{-ax} \tag{2}$$

(1) G. Grünesein, Ann. d. Phys. Bd. 3, pag. 43, 1900.

(2) Kirchhoff u. Hansemann, Wied. Ann. Bd. IX, Bd. XIII.

(3) Wied. u. Franz, Wied. Ann. 1, 1853.

(4) Righi, N. C., ser. III, tom. XXIV, pp. 5 e 97.

(5) Qui, come sempre dopo, è necessario che si possano considerare h e k come costanti, almeno per ogni singola esperienza. Ora ricordiamo che ammettere h costante significa ammettere valida la legge di Newton per tutta la lunghezza dell'asta, cioè per tutti

dove A e B sono costanti arbitrarie. Se immaginiamo ora un numero arbitrario di sezioni: $1, 2, 3, \ldots n \ldots m$, che dividano l'asta in parti di uguale lunghezza l, troviamo facilmente dalla (2), che fra le temperature t_{n-1}, t_n, t_{n+1} di tre sezioni consecutive sussiste la relazione

$$\frac{t_{n-1} + t_{n+1}}{t_n} = e^{ax} + e^{-ax} = 2r,$$

essendo r una costante che si può quindi determinare sperimentalmente dalle temperature t_{n-1}, t_n, t_{n+1}. Da questa relazione otteniamo subito

$$2l\sqrt{\frac{h}{kd}} = \log\left(r + \sqrt{r^2 - 1}\right). \tag{3}$$

Ora nelle esperienze di Wiedemann e Franz, in cui le condizioni di temperatura così dell'asta come dell'ambiente erano le stesse, per le diverse aste, bastava che queste fossero di ugual diametro e argentate e brunite accuratamente, perchè al variare del materiale dell'asta rimanesse invariato, con d ed l, anche il coefficiente h; cosicchè per due aste di sostanze diverse per le quali k, k' e r, r' fossero rispettivamente i coefficienti di conducibilità interna e le relative costanti, si poteva porre

$$\frac{k}{k'} = \frac{\log^2\left(r' + \sqrt{r'^2 - 1}\right)}{\log^2\left(r^2 + \sqrt{r^2 - 1}\right)}. \tag{4}$$

Se la legge di Newton fosse applicabile entro vasti limiti, questa formula (4) potrebbe ugualmente servire per il confronto fra le conducibilità d'una stessa asta a temperature anche molto diverse. Ma è noto invece che non è così, ossia che il coefficiente di proporzionalità, h, varia da un intervallo all'altro e risulta quindi diverso per due esperienze a temperature anche non molto differenti. Indicando allora per una data asta, con k, h, r e con k', h', r' rispettivamente i coefficienti di conducibilità interna ed esterna e la costante relativi a due esperienze a temperature differenti, dalle due formule analoghe alla (3) otteniamo

$$\frac{k}{k'} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{\log^2\left(r + \sqrt{r'^2 - 1}\right)}{\log^2\left(r + \sqrt{r^2 - 2}\right)}. \tag{5}$$

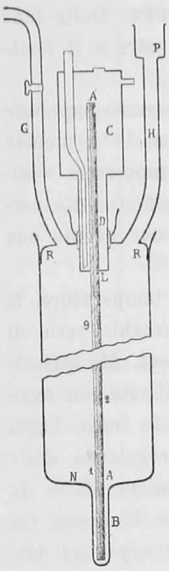
Dunque, come avevo detto, le presenti esperienze hanno bisogno di un calcolo più complicato fondato su questa formula più generale, per la quale come si vede è necessario trovare il modo di calcolare, per ogni coppia di

---

gli intervalli di temperatura fra l'asta e l'ambiente; e ammettere k costante significa pure ammettere che il coefficiente di conducibilità interna non varii sensibilmente entro i limiti di temperatura che assume l'asta in ogni singola esperienza.

esperienze, il rapporto $\frac{h'}{h}$. Cerchiamo per questo di fare intanto delle ricerche sperimentali, e prendiamo come sostanza di studio dapprima il piombo.

3. *Prime esperienze.* — La disposizione sperimentale è qui modificata in modo da poter servire ugualmente bene così per le temperature superiori a 0°, come per le basse temperature. L'asta AA′ (fig. 1) di piombo puro di Kahlbaum di 6 mm. di diametro, lunga circa 60 cm. è disposta verticalmente dentro un cilindro MN di vetro di 8 cm. di diametro, lungo 45 cm., annerito all'interno. Questo cilindro MN è chiuso inferiormente, e nella parte centrale del fondo è tirato un tubicino B di 8 mm. di diametro lungo circa 7 cm., a pareti sottilissime; in questo viene introdotta un'estremità dell'asta, insieme alla polvere di una lega fusibile a 70°. Superiormente il cilindro è chiuso da un coperchio RR pure di vetro, e smerigliato. Questo coperchio ha un'apertura centrale per cui passa il collo D di una scatola metallica CD, saldata in L all'asta, in cui circola una corrente d'acqua proveniente da un grande serbatoio di 1 metro cubo. Il coperchio stesso ha poi tre tubulature laterali; una di queste, la G, munita di rubinetto a tenuta, serve a connettere l'apparecchio con una pompa del tipo Geissler assai grande colla quale possiamo arrivare rapidamente ai raggi catodici. Per le altre due tubulature del coperchio, la H, e l'altra uguale che nella figura in sezione non può venir disegnata, passano i fili delle coppie termoelettriche che servono a misurare la temperatura in nove sezioni dell'asta distribuite a intervalli uguali. Questi fili sono masticiati a perfetta tenuta in P. Le coppie sono costituite da un filo di ferro di 0,24 mm. di diametro, e uno di argentana di 0,17 mm.; esse sono perfettamente uguali fra loro e graduate ripetutamente fra le temperature di 100° e — 180° con due termometri, uno di Alvergnat per le temperature sopra 0°, e uno di Altmann per le basse temperature corretto al Phys.-Tech. Reichsanstalt. Una delle giunture di ogni coppia è saldata accuratamente entro uno dei nove piccoli fori, del diametro di 0.5 mm., praticati nell'asta ad intervalli uguali di 50 mm., e l'altra è posta nel ghiaccio fondente all'esterno. Un commutatore a pozzetti di mercurio permette di congiungere a volontà ciascuna delle coppie con un galvanometro di Thomson. Le curve di graduazione delle coppie venivano spesso verificate.



Le serie d'esperienze di cui riferiamo prima i risultati furono fatte nel seguente modo. Tutto il cilindro MN è circondato da un grosso manicotto di lamina di zinco masticiato ad esso circolarmente in N. Quattro tubi se-

parati che arrivano al fondo di questo manicotto immettono in esso a getto continuo l'acqua dallo stesso grande serbatoio che alimenta la scatola CD. L'estremo B è introdotto per 6 cm. in un apparecchio simile a quello che si adopera per determinare il 100° dei termometri. Fra il fondo N del manicotto e l'estremo superiore dell'apparecchio a 100° è fissata una larga scatola anulare pure di lamina di zinco alta quasi due cm., nella quale scorre abbondante l'acqua che esce dalla parte superiore del manicotto. Della lana è introdotta negli interstizi fra questa scatola, la parete di vetro e il fondo del manicotto stesso.

In questo modo nelle prime esperienze l'ambiente e l'estremo superiore dell'asta si mantengono alla temperatura costante di circa 16°; mentre l'estremo inferiore è sempre mantenuto a 100°. Queste temperature venivano misurate con termometri confrontati con lo stesso termometro d'Alvergnat, e anche per mezzo di una coppia uguale alle altre nove avente una giuntura mobile a volontà.

Appena cominciato così il regime costante per queste temperature, si facevano successivamente a intervalli di pochi minuti, parecchie serie di misure delle temperature assunte dalle varie sezioni dell'asta. Ma passati appena 40 o 50 minuti le temperature delle nove sezioni dell'asta non cambiavano più sensibilmente col tempo, cioè si era già stabilito lungo l'asta lo stato stazionario di temperatura. Come esempio della regolarità delle esperienze riferisco qui una tabella relativa a 4 serie di misure fatte da questo momento in poi durante sei ore. Nella prima colonna di questa tabella, sono scritti i numeri d'ordine delle sezioni dell'asta a partire dall'estremo inferiore a 100°; le temperature delle sezioni stesse, osservate per ogni serie di misure, sono scritte in ciascuna delle quattro colonne seguenti fino alla sesta che ne dà le medie; la settima dà gli eccessi t_n di queste medie sulla temperatura ambiente; la penultima colonna dà poi la costante $2r = \frac{t_{n-1} + t_{n+1}}{t_n}$ relativa a tre sezioni dell'asta che sono ad intervalli di 50 mm.; e l'ultima dà la costante analoga $2p = \frac{t_{n-2} + t_{n-2}}{t_n}$ relativa a tre sezioni situate ad intervalli di 100 mm. (¹).

(¹) Osserviamo che per questa costante $2p$ vale la stessa formula (5) scritta per la $2r$.

TABELLA I.

Temperature degli estremi: 15°,3 e 100°. Ambiente a 15°,3.

	Temperature dell'asta				Medie	Eccessi t_n	$\frac{t_{n-1}+t_{n+1}}{t_n}$ $2r$	$\frac{t_{n-2}+t_{n+2}}{t_n}$ $2p$
1	71,65	72,0	71,7	71,7	71,76	56,46	—	—
2	53,3	53,8	53,3	53,5	52,52	38,22	2,146	—
3	40,9	41,15	40,6	40,8	40,86	25,56	2,167	2,652
4	32,6	32,9	32,2	32,2	32,47	17,17	2,149	2,656
5	26,7	26,9	26,4	26,5	26,63	11,33	2,167	2,668
6	22,6	23,1	22,5	22,5	22,68	7,38	2,168	2,692
7	19,8	20,1	20,0	20,0	19,97	4,67	2,158	—
8	17,7	18,0	17,9	18,4	18,0	2,70	—	—
9	—	—	—	—	—	Medie	2,1592	2,667

Sarebbe superfluo riportare qui le tabelle relative ad altre esperienze eseguite nello stesso modo e che hanno lo stesso andamento di questa prima. Basterà dire che le medie di tutti i valori trovati in queste condizioni per le due costanti sono rispettivamente: $2r = 2.1581$ e $2p = 2.6656$.

4. È necessario prima di procedere oltre fare qui una osservazione sopra una proprietà che è certamente sfuggita a Wiedemann e Franz, e che mi pare renda questo metodo più adatto e più sicuro di quello che essi non lo credessero, specialmente per misure di confronto fra aste di diverso materiale, alle medesime temperature, com'era proprio il caso loro.

Ritorniamo alla formula $e^{la} + e^{-la} = 2r$, che definisce la costante $2r$: la derivata del primo membro rispetto ad l è positiva, poichè essendo a ed l positive, è anche: $e^{la} > 1$, e: $e^{-la} < 1$; dunque $2r$ cresce col crescere dell'intervallo compreso fra le sezioni dell'asta di cui vien misurata la temperatura. Le esperienze precedenti dànno la misura di quest'aumento per un caso particolare; abbiamo trovato infatti che quando questo intervallo cresce da 50 mm. a 100 mm. la costante cresce da 2,1581 a 2,6656.

Ora poichè, come si vede dalle formule (3) o (5), il coefficiente di conducibilità interna (a parità delle altre condizioni) è inversamente proporzionale al $\log^2(r + \sqrt{r^2 - 1})$, dove $\lim_{r=1}(r + \sqrt{r^2 - 1}) = 1$, quando $2r$ è molto vicina a 2, un piccolo errore d'osservazione che faccia variare di poco $2r$ stessa, determina invece una notevole variazione nel coefficiente di conducibilità. Dunque, dichiarano Wiedemann e Franz, non è da assegnare troppo peso ai valori desunti da queste costanti quando esse non si discostano che poco dal valore 2. E così essi vengono a escludere, non solo che

il metodo sia applicabile con fiducia ai metalli buonissimi conduttori (per i quali $2r$ è vicinissima a 2) come l'argento, il rame, l'oro, di cui tuttavia essi dànno i valori del coefficiente di conducibilità relativo trovato con questo stesso metodo, ma dichiarano anche che quella stessa causa d'errore è la principale ragione per cui essi, per tutti i materiali studiati, preferiscono le esperienze fatte nell'aria a quelle fatte nel vuoto, appunto perchè nelle prime la costante risulta maggiore, cioè più discosta da 2, che non nelle seconde.

Io ho detto prima che certamente ad essi è sfuggita la proprietà che la costante $2r$ cresce assai col crescere dell'intervallo fra le sezioni dell'asta di cui vien misurata la temperatura, poichè mi sembra certo, che, se essi avessero veduto questo modo semplice di aumentare la costante stessa, non avrebbero scelto condizioni peggiori d'esperienza per raggiungere in modo più incerto e più limitato lo stesso scopo.

Notiamo ancora che in luogo di calcolare la costante $2p$ direttamente dai quozienti $\frac{t_{n-2}+t_{n+2}}{t_n}$, come è stato fatto fin qui, possiamo anche calcolarlo dal valore trovato per la $2r$, servendoci della formula (3), dalla quale, ponendovi successivamente $l = 50$ mm. per la $2r$, e $l = 100$ mm. per la $2p$, deduciamo facilmente l'altra $p = \frac{M^4+1}{2M}$, dove $M = r + \sqrt{r^2-1}$; e da questa otteniamo $p = 2{,}6574$, valore che, a conferma della validità delle formole, è vicinissimo all'altro 2,6656 trovato direttamente.

Il valore poi della costante trovato da Wiedemann e Franz nelle stesse nostre condizioni di temperatura e nel vuoto per un'asta di piombo puro del diametro di 62 mm. e per un'intervallo: $l = 52$ mm., è: 2,176. Calcolando in modo simile al precedente il valore a cui si riduce questa costante, quando il diametro sia di 60 mm. come al presente, e l'intervallo $l = 50$ mm., troviamo il valore 2.168 vicinissimo, ma leggermente superiore al valore 2.158 trovato ora. Il leggero aumento può essere giustificato dal fatto che il vuoto ottenuto da Wiedemann e Franz con una pompa ad aria doveva essere assai meno spinto di quello ottenuto qui, con una buona pompa a mercurio.

5. Altre esperienze furono fatte poi con una disposizione simile alla precedente, con la sola differenza che al piccolo apparecchio di Regnault a 100° in cui era prima introdotto il solo tubicino B, ne avevo sostituito uno molto più grande in cui era introdotto tutto il cilindro MN. Così l'estremo superiore dell'asta era sempre a 16° e l'estremo inferiore a 100° come prima, ma con l'ambiente ora a 100° invece che a 16°. Dobbiamo qui osservare subito, una volta per sempre, che le stesse formule trovate prima per il caso in cui l'ambiente fosse alla temperatura dell'estremo più freddo, valgono senza modificazioni anche per quest'altro caso in cui l'am-

biente si trova invece alla temperatura dell'estremo dell'asta più caldo. Infatti, essendo ora la temperatura dell'ambiente sempre più alta di quella dell'asta, l'analoga alla (1) in questo caso è

$$\frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{4h}{kd}t\,;$$

se sostituiamo in questa $t' = -t$ si ritorna alla (1) stessa in t', e quindi come prima si giunge alla formula

$$\frac{t'_{n-1} + t'_{n+1}}{t'_n} = e^{la} + e^{-la} = \frac{t_{n-1} + t_{n+1}}{t_n}\,;$$

per cui le formule posteriori (3) e (4) rimangono le stesse. E così la tabella II, che riporto pure come esempio dell'andamento di queste esperienze con l'ambiente a 100°, è in tutto simile alla tabella I toltochè l'ultima colonna dà ora gli eccessi t_n della temperatura ambiente sulle temperature dell'asta.

TABELLA II.

Temperature degli estremi: 16°,7 e 100°, Ambiente a 100°.

	Temperatura dell'asta					Medie	Eccessi t_n	$2r'$	$2p'$
1	99,3	99,5	99,2	99,4	99,5	99,38	—	—	—
2	99	99,4	89,1	99	99,3	99,16	—	—	—
3	98,1	98,35	98,25	98,1	97,9	98,11	1,89	—	—
4	97	97,1	96,9	96,7	96,7	96,88	3,12	2,298	—
5	95	94,9	94,5	94,6	94,6	94,72	5,28	2,307	3,320
6	90,9	91	90,9	90,9	91	90,94	9,06	2,309	3,363
7	84,5	84,6	84,3	84,1	84,3	84,36	15,64	2,328	3,341
8	72,9	72,75	72,65	72,45	72,5	72,65	27,35	2,289	—
9	43,1	53,02	52,8	53,1	53	53,03	47,97	—	—
							Medie	2,3062	3,341

La media dei valori trovati in queste nuove condizioni per la costante relativa all'intervallo di 50 mm. è: $2r' = 2{,}3221$, e quella per l'intervallo di 100 mm. è: $2p' = 3{,}40915$.

6. Applicando allora la formula (5) alle prime esperienze con l'ambiente a 15° e a queste ultime con l'ambiente a 100°, essendo k, h, r e p rispettivamente i coefficienti di conducibilità interno ed esterno e la costante relativa alle prime, e k', h', r' e p' gli elementi corrispondenti relativi alle seconde, avremo (vedi nota a pag. 624)

$$\frac{k}{k'}\,\frac{h'}{h} = \frac{\log^2(r' + \sqrt{r'^2 - 1})}{\log^2(r + \sqrt{r^2 - 1})} = \frac{\log^2(p' + \sqrt{p'^2 - 1})}{\log^2(p + \sqrt{p^2 - 1})}\,.$$

Sostituendo qui i valori dati dalle esperienze troviamo, rispettivamente dai due quozienti, i valori 2,0092 e 2,0109; cosicchè tanto con le costanti relative all'intervallo di 50 mm. quanto con quelle relative all'intervallo di 100 mm. troviamo

$$\frac{k}{k'} \cdot \frac{h'}{h} = 2{,}01 . \tag{6}$$

Ora osserviamo che le temperature delle diverse sezioni dell'asta nelle ultime esperienze, sono, è vero, più alte delle temperature che le medesime sezioni assumono nelle prime esperienze; ma sappiamo, per numerose determinazioni fatte con varî metodi, che il coefficiente di conducibilità interno fra le temperature di 0° e 100°, e anche spesso in limiti più estesi, per alcune sostanze tende a crescere, per altre più numerose a decrescere con l'aumentare della temperatura, ma varia sempre in modo poco sensibile. Per citare determinazioni recenti sul nostro caso ricorderò che W. Jäger e H. Diesselhorst [1] trovano per il piombo puro a 18° un coefficiente $k = 0{,}0827$; a 100° invece $k = 0{,}0815$. Possiamo quindi fin da ora prevedere che il valore del rapporto $\frac{h'}{h}$ deve discostarsi molto poco dal valore 2,01 ora trovato, benchè debba essere alquanto più piccolo, essendo $\frac{k}{k'}$ leggermente maggiore di 1.

7. Sarebbe stato opportuno, dopo questo risultato, modificare la teoria di Fourier introducendo per l'irraggiamento una formula molto più rispondente al vero in limiti vasti che non sia quella di Newton; per esempio la formula di Stéfan. Le condizioni teoriche per la validità della legge di Stéfan sarebbero nel nostro caso approssimativamente soddisfatte, inquantochè uno dei corpi raggianti, cioè l'ambiente, si può ritenere rigorosamente nero, per la sua forma e per essere annerito; e l'altro, l'asta, non molto diversa da un corpo grigio. Di più la legge di Stéfan ha anche per noi il vantaggio di essere stata riconosciuta la più esatta per le basse temperature [2].

Ma l'introduzione della legge di Stéfan nell'equazione (1) di Fourier conduce alla relazione

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{dx^2} = a^2(\mathrm{T}^4 - \mathrm{T}_0^4),$$

dove T e T_0 sono le temperature assolute di una sezione dell'asta e dell'ambiente. Essa si può scrivere, indicando al solito la funzione T con y, e ponendo $y' = p$,

$$p\frac{dp}{dy} = a^2(y^4 - y_0^4);$$

[1] W. Jäger u. H. Diesselhorst, Wissensch. Abh. d. Phys. Techn. Reichsanstalt, 3, 1900.

[2] M. Compan, Comptes Rendus, t. CXXXIII, pag. 803, 1901.

da cui

$$p^2 = 2a^2\left(\frac{y^5}{5} - y_0^4\, y\right) + C;$$

e finalmente

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2a^2\left(\frac{y^5}{5} - y_0^4\, y\right) + C}} + C',$$

che darebbe la distanza x in funzione della temperatura y, ma espressa per mezzo di un integrale iperellittico. Per questo non si può procedere più oltre nel calcolo almeno in forma rigorosa.

8. Ma per determinare direttamente il rapporto $\frac{h'}{h}$ possiamo girare la difficoltà col seguente artifizio. Consideriamo una porzione assai limitata dell'asta, per esempio quella compresa fra le sezioni 4 e 6, o 4 e 7, scegliendo appunto la parte media dove il fenomeno è certamente più regolare. In una porzione così limitata la temperatura delle sezioni varia di poco, cioè di circa 6° o 12° al massimo; quindi per la stessa esperienza e per un elemento qualunque della porzione considerata possiamo ritenere la h costante. Se indichiamo allora con T la temperatura media assoluta di un elemento d'asta compreso in questa porzione, e con T_0 quella dell'ambiente, nelle condizioni delle prime esperienze (tabella I) la quantità di calore Q irraggiata per unità di superficie, sarà secondo la legge di Newton: $Q = h(T - T_0)$. Mentre secondo la legge di Stéfan questa medesima quantità di calore sarà espressa da $Q = \mu(T^4 - T_0^4)$, dove μ è il coefficiente secondo la legge di Stéfan, che possiamo qui ritenere sempre rigorosamente costante. Il valore di h relativo all'elemento considerato sarà dunque

$$h = \mu\,\frac{T^4 - T_0^4}{T - T_0} = \mu(T^3 + T^2\,T_0 + T\,T_0^2 + T_0^3).$$

Se poi T′ indica la temperatura assoluta dello stesso elemento d'asta e T'_0 quella dell'ambiente nelle condizioni delle ultime esperienze (tabella II), la nuova quantità di calore Q′, questa volta ricevuta dall'asta per unità di superficie, sarà, secondo la legge di Newton, $Q' = h'(T'_0 - T')$; e secondo la la legge di Stéfan $Q' = \mu(T'^4_0 - T'^4)$; per cui

$$h' = \mu\,\frac{T'^4_0 - T'^4}{T'_0 - T'} = \mu\,(T'^3 + T'^2\,T'_0 + T'\,T'^2_0 + T'^3_0).$$

E allora potremo determinare il rapporto $\frac{h'}{h}$ dalla relazione

$$\frac{h'}{h} = \frac{T'^3 + T'^2\,T'_0 + T'\,T'^2_0 + T'^3_0}{T^3 + T^2\,T_0 + T\,T_0^2 + T_0^3}.$$

Se sostituiamo in questa a T e T_0, T' e T'_0 i valori dati dalle tabelle successivamente per le sezioni 4, 5, 6 e 7 (aggiungendo si intende 273 ad ognuno di questi) troviamo rispettivamente $\frac{h'}{h} = 1{,}949$; $= 1.989$; $= 1{,}999$ $= 1.975$, che sono dunque i quattro valori del rapporto $\frac{h'}{h}$ relativo ad elementi di asta che comprendono rispettivamente le sezioni 4, 5, 6 e 7. Dunque il valore medio di questo rapporto nella porzione considerata potremo prenderlo uguale alla media di questi valori, cioè $\frac{h'}{h} = 1{,}978$. Sostituendo questo nella (6) otteniamo:

$$\frac{k}{k'} = 1{,}016 . \tag{7}$$

9. Per il rapporto analogo fra i coefficienti di conducibilità interna del piombo alle temperature di 18° e 100° Jäger e Diesselhorst, con un metodo fondato sulla determinazione dello stato non stazionario, trovano come abbiamo visto il valore $\frac{825}{815} = 1{,}015$. Esperienze assai anteriori di L. Lorenz [1] danno pure per il rapporto fra il coefficiente di conducibilità del piombo a 0° (trovato uguale a 0,0836) e quello a 100° (trovato uguale a 0,0796) il valore $\frac{836}{796} = 1{,}096$. La concordanza abbastanza buona fra questi precedenti risultati e il valore di $\frac{k}{k'}$ trovato ora (k possiamo intenderlo misurato a circa 35° e h' a circa 80°, v. tab. I e II), mi conferma nell'attendibilità del metodo. Osservo che fondando il calcolo sulla legge di Newton si sarebbe trovato, come si deduce dalla (6), per $\frac{k}{k'}$ il valore 2,01 enormemente errato.

10. Si vede già da queste esperienze a temperature superiori a 0° che il metodo da me proposto in questa Nota fondato sulla legge di Stéfan è da preferirsi a quello fondato sulla legge di Newton; ed è il solo capace di dare risultati attendibili nel nostro caso in cui variano le condizioni di temperatura dell'ambiente e dell'asta. Esso è poi tanto più da preferirsi per le esperienze che descriverò in una prossima Nota, eseguite a basse temperature, inquantochè è chiaro che per queste la divergenza fra la legge di Newton e quella di Stéfan si accentua notevolmente.

[1] Wied. Ann., 13, pp. 422 e 582, 1881.