ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

e dopo la sosta dei tre anni 1901-4, apparisce un'altra quasi stazionarietà nel biennio 1904-6; ma questi ultimi valori sono sensibilmente inferiori a quelli del primo biennio. Pur non ammettendo che le intere differenze fra determinazione e determinazione sieno da ascriversi a deformazione del metallo dei pendoli (essendovi sempre a temere errori residuali o nel tempo, o nella flessione del supporto, o nell'attrito su di questo, ecc.) pure si deve riconoscere, fra l'andamento dei due bienni una netta diversità, ed ammettere che, sebbene con lentezza, abbia effettivamente avuto luogo una contrazione del metallo da cui i pendoli son costituiti, non tanto nei primi due anni, quanto nei cinque ultimi; contrazione che dalle ultime misure sembra accenni a cessare.

Matematica. — *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali.* Nota del Corrispondente F. Enriques.

La Nota, che mi onoro di presentare all'Accademia, porta un primo contributo al problema di determinare tutte le superficie algebriche che ammettono una trasformazione birazionale non periodica, e quindi una serie discontinua di trasformazioni. La possibilità di superficie siffatte, che non posseggano un gruppo continuo di trasformazioni, era conosciuta per gli esempii del sig. Humbert (superficie di Kummer) e del sig. Painlevè, ai quali ho aggiunto recentemente l'esempio delle superficie di genere $p_a = p_g = 0$ coi plurigeneri $P_2 = 1$, $P_3 = 0$.

Qui si dimostra che *le superficie con una trasformazione non periodica* (non possedenti un gruppo continuo di trasformazioni) *contengono sempre un fascio di curve ellittiche, all'infuori del caso* $p_a = P_2 = 1$. Questo caso sembra dar luogo ad una *vera eccezione* al teorema; infatti il sig. Fano mi comunica che una superficie del 4° ordine F_4, contenenente una sestica di genere due, ammette una serie discontinua di trasformazioni in sè, e pare che la suddetta F_4 non possieda in generale fasci di curve ellittiche.

A prescindere dalle superficie coi generi 1, il teorema sopra enunciato trae il suo interesse da ciò, che, sotto alcune condizioni complementari, esso è invertibile, di guisachè si può dire che *le superficie con un fascio di curve ellittiche ammettono in generale gruppi discontinui di trasformazioni in sè stesse.*

Un'analisi approfondita della questione permetterà di porre il resultato qui ottenuto sotto una forma più notevole. Infatti (lasciando sempre da parte il caso $p_a = P_2 = 1$) si potranno esprimere le condizioni perchè una superficie possegga una serie discontinua, ma non un gruppo continuo, di trasformazioni birazionali, scrivendo che il genere lineare $p^{(1)} = 1$ ($p_a \geq 0$ $P_2 > 0$), e che il numero degli *integrali doppi di 2ª specie* soddisfa ad una certa diseguaglianza.

Ma riservo questo teorema (che esige ancora qualche sviluppo) ad un'altra comunicazione.

1. Sia F una superficie algebrica la quale ammetta una trasformazione birazionale non periodica, ma non un gruppo continuo di trasformazioni in sè stessa. Anzitutto sarà il suo genere aritmetico

$$p_a \geq 0,$$

ed il suo bigenere

$$P_2 > 0 \qquad (P_2 \geq p_a);$$

infatti una superficie per cui $p_a = P_2 = 0$ è razionale (Castelnuovo), ed una superficie per cui $p_a < 0$ è riferibile ad una rigata, oppure è ellittica o iperellittica (Enriques), cioè tutte queste superficie posseggono gruppi continui di trasformazioni.

S' indichi con $p^{(1)}$ il genere lineare (virtuale) di F; il bigenere P_2, il trigenere P_3 ecc. soddisferanno rispettivamente alle diseguaglianze

$$\begin{aligned} P_2 &\geq p_a + p^{(1)} \\ P_3 &\geq p_a + 3p^{(1)} - 2 \\ P_4 &\geq p_a + 6p^{(1)} - 5 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Quindi, se $p^{(1)} > 1$ e $p_a \geq 0$, si avranno su F almeno ∞^3 curve tricanoniche ecc.; ed è facile vedere che queste, a prescindere tutt'al più da parti fisse, saranno irriducibili, per modo che si potrà costruire una superficie φ, trasformata di F appartenente ad un certo spazio S_r, avente come sezioni iperpiane curve pluricanoniche.

Ora se F ammette trasformazioni birazionali in sè, queste si rispecchiano in trasformazioni proiettive di φ. Ma, com'è noto, una superficie che ammetta una trasformazione proiettiva non periodica, ammette tutto un gruppo continuo di trasformazioni proiettive, ed è razionale o rigata (Enriques-Fano). Ciò non potendo accadere per la φ, si conclude intanto che *il genere lineare di* F *vale*

$$p^{(1)} = 1.$$

2. Ora, lasciando da parte l'ipotesi che la F possegga trasformazioni in sè, vogliamo stabilire un teorema generale sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$. per cui $p_a \geq 0$, $P_2 > 0$.

Designando con $p_g (= P_1)$ il genere geometrico, si possono distinguere i seguenti casi:

1) $\qquad p^{(1)} = 1, \, p_g > 1.$

Allora la superficie F contiene un fascio di curve ellittiche, costituito dalle curve canoniche o delle loro componenti, se quelle sono riducibili.

2) $$p^{(1)}=1\,,\,p_g=p_a=1\,.$$

Qui il bigenere P_2 può avere i valori

$$P_2=1 \quad \text{o} \quad P_2>1\,.$$

Se $P_2=1$ la superficie ha tutti i plurigeneri uguali ad 1; le curve pluricanoniche hanno l'ordine 0; ogni sistema lineare puro di genere π su F ha il grado $n=2\pi-2$. Il primo esempio di tali superficie è dato dalla superficie del 4° ordine che non contiene in generale fasci di curve ellittiche.

Se $P_2>1$ si ha su F un fascio di curve ellittiche bicanoniche, o componenti delle curve bicanoniche.

3) $$p^{(1)}=1\,,\,p_g=p_a=0\,,\,P_2>0\,.$$

Può aversi

$$P_2=1 \quad \text{o} \quad P_2>1\,.$$

Se $P_2=1$ la curva bicanonica può avere l'ordine 0 (essendo $P_3=P_5=\cdots=0$ $P_2=P_4=P_6=\cdots=1$), oppure l'ordine >0 (essendo $P_3>0\,,\,P_6>1$); ed in ambi i casi la F possiede fasci di curve ellittiche [1].

Se $P_2>1$ le curve bicanoniche, o le loro componenti, formano su F un fascio di curve ellittiche.

4) $$p^{(1)}=1\,,\,p_a=0\,,\,p_g=1\,.$$

Essendo l'irregolarità

$$p_g-p_a=1$$

la superficie possiede un integrale semplice di 1ª specie con due periodi e quindi un fascio ellittico di curve C, di grado 0 e di un certo genere π (>0). Essa possiede poi una curva canonica K ellittica secante in $2\pi-2$ punti ogni curva C.

Vogliamo dimostrare che, dato possa essere $\pi>1$, sarà il bigenere $P_2>1$, e quindi si avrà su F un fascio di curve ellittiche costituito dalle curve bicanoniche o dalle componenti di queste.

Pongasi che sia $\pi>1$ e $P_2=1$; facciamo vedere che si arriva ad un assurdo.

Si costruisca il sistema lineare $|C''|$ secondo aggiunto ad una curva C del fascio; esso ha la dimensione $3\pi-3$ (perchè il primo aggiunto $|C'|=|C+K|$ ha il genere $3\pi-2$), e, stante l'ipotesi $P_2=1$, sega sulla C la serie bicanonica completa $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$.

[1] Cfr. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*. Memorie della Società Italiana delle scienze (detta dei XL), 1906.

Ora designando con $\overline{C}$ un'altra curva qualsiasi del fascio ellittico dato su F, il sistema

$$|C'' + \overline{C} - C| = \overline{C}''|$$

è il secondo aggiunto a $\overline{C}$. Al variare di $\overline{C}$ tutti questi sistemi lineari formano un sistema continuo non lineare

$$\{C''\},$$

di dimensione $3\pi - 2$, le cui curve segano su C gruppi della anzidetta serie bicanonica $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$. Pertanto dovranno esistere ∞' curve residue di C rispetto a $\{C''\}$, una delle quali è la curva bicanonica di F. Queste curve saranno, come la bicanonica, di genere 1, e comporranno un fascio ellittico. Ma tale conclusione è incompatibile coll'ipotesi $p_g = 1$, perchè a questo secondo fascio ellittico corrisponderà un secondo integrale semplice di 1ª specie di F, ciò che porta $p_g - p_a > 1$.

Raccogliendo i resultati dell'analisi precedente possiamo enunciare la conclusione:

Una superficie ($p_a \geq 0$, $P_2 > 0$) *di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ *contiene sempre un fascio (razionale o irrazionale) di curve ellittiche; fa eccezione il caso delle superficie con tutti i generi* 1 ($p_a = P_2 = 1$).

3. In base ai nn. 1, 2, ogni superficie che ammetta una trasformazione generante una serie discontinua, ma non un gruppo continuo, di trasformazioni birazionali in sè stessa, possiede un fascio di curve ellittiche, oppure ha tutti i generi uguali ad 1.

Si tratta ora d'invertire, fin dove è possibile, questo resultato.

Sia F una superficie contenente un fascio di curve ellittiche C; e suppongasi che vi siano due curve K_1, K_2 secanti le C in uno stesso numero m di punti e secondo gruppi G'_m, G''_m i cui multipli non siano equivalenti.

Sopra una C generica consideriamo l'integrale ellittico di 1ª specie I, coi periodi ϖ, ϖ'; siano a_1, a_2 rispettivamente le somme dei valori di I nei punti dei due gruppi G_m, G'_m. Allora si può definire razionalmente una trasformazione birazionale della curva C in sè stessa, ponendo

$$I' \equiv I + a_1 - a_2.$$

Questa trasformazione non è periodica, poichè si avrebbe altrimenti

$$r(a_1 - a_2) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \varpi, \varpi').$$

Al variare di C nel fascio si ha una trasformazione birazionale della superficie F, le cui potenze formano un gruppo discontinuo.

È chiaro che se le curve K_1 K_2 segassero le C in un numero diverso di punti, p. es. in m_1, m_2 punti rispett. basterebbe sostituire ad esse due multipli convenienti, p. es. $m_2 K_1$, $m_1 K_2$, e si otterrebbe sempre una trasformazione non periodica di F, semprechè non vi sia equivalenza fra due multipli qualsiasi dei gruppi segati da K_1, K_2 sulle C.

Si può dunque affermare che:

Se una superficie algebrica contiene un fascio di curve ellittiche C, *e due curve secanti sulle* C *dei gruppi i cui multipli non sono equivalenti, essa ammette una trasformazione non periodica e quindi una serie discontinua di trasformazioni birazionali, che lasciano ferme le* C.

Questo caso si può considerare come il *caso generale* delle superficie con un fascio di curve ellittiche, quando le suddette superficie si definiscano come luogo di curve ellittiche, appoggiantisi, in un certo numero di punti, a delle linee direttrici.

Aggiungasi infine l'osservazione che se una superficie contiene due fasci di curve ellittiche, mutate in sè rispettivamente da due trasformazioni non periodiche, moltiplicando queste trasformazioni si otterrà in generale un gruppo discontinuo che non ammetterà fasci invarianti di curve ellittiche.

Matematica. — *Alcune considerazioni sulle funzioni armoniche ellissoidali.* Nota del Corrispondente G. MORERA.

I matematici inglesi sogliono oggidì, sul modello della trattazione svolta nel classico « Treatise on natural Philosophy » di Thomson e Tait (vedi Appendice B, pag. 171 della I parte, 2ª edizione), basare la teoria delle armoniche sferiche sulla considerazione delle derivate dell'inversa del raggio vettore; è per es. questo il punto di partenza adottato in argomento nel celebre « Treatise on Electricity and Magnetism » del Maxwell (Chapter IX, vol. I, pag. 194 della 3ª edizione).

Con un procedimento simile si può trattare con vantaggio la teoria delle armoniche ellissoidali, come ho mostrato nella mia Memoria: *Sulla attrazione degli ellissoidi* (Mem. della R. Acc. di Torino, vol. LV, ser. II) e nella mia Nota: *Sull'attrazione degli strati ellissoidali* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. XLI).

Il problema di Dirichlet per lo spazio interno all'ellissoide fu risoluto come è ben noto da Lamé coll'uso delle coordinate ellittiche, che lo condusse alla memorabile scoperta delle soluzioni semplici dell'equazione di Laplace, formate dal prodotto di tre identiche funzioni di ciascuna coordinata ellittica, colle quali soluzioni semplici mercè una serie infinita si esprime la soluzione cercata.

La scoperta di Lamé fu notevolmente perfezionata da Liouville, sia coll'osservare che i prodotti di Lamé sull'ellissoide si convertono con un cambiamento di variabili in funzioni sferiche, il che basta ad assicurare la