ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

tipli convenienti, p. es. $m_2 K_1$, $m_1 K_2$, e si otterrebbe sempre una trasformazione non periodica di F, semprechè non vi sia equivalenza fra due multipli qualsiasi dei gruppi segati da K_1, K_2 sulle C.

Si può dunque affermare che:

Se una superficie algebrica contiene un fascio di curve ellittiche C, *e due curve secanti sulle* C *dei gruppi i cui multipli non sono equivalenti, essa ammette una trasformazione non periodica e quindi una serie discontinua di trasformazioni birazionali, che lasciano ferme le* C.

Questo caso si può considerare come il *caso generale* delle superficie con un fascio di curve ellittiche, quando le suddette superficie si definiscano come luogo di curve ellittiche, appoggiantisi, in un certo numero di punti, a delle linee direttrici.

Aggiungasi infine l'osservazione che se una superficie contiene due fasci di curve ellittiche, mutate in sè rispettivamente da due trasformazioni non periodiche, moltiplicando queste trasformazioni si otterrà in generale un gruppo discontinuo che non ammetterà fasci invarianti di curve ellittiche.

Matematica. — *Alcune considerazioni sulle funzioni armoniche ellissoidali.* Nota del Corrispondente G. Morera.

I matematici inglesi sogliono oggidì, sul modello della trattazione svolta nel classico « Treatise on natural Philosophy » di Thomson e Tait (vedi Appendice B, pag. 171 della I parte, 2ª edizione), basare la teoria delle armoniche sferiche sulla considerazione delle derivate dell'inversa del raggio vettore; è per es. questo il punto di partenza adottato in argomento nel celebre « Treatise on Electricity and Magnetism » del Maxwell (Chapter IX, vol. I, pag. 194 della 3ª edizione).

Con un procedimento simile si può trattare con vantaggio la teoria delle armoniche ellissoidali, come ho mostrato nella mia Memoria: *Sulla attrazione degli ellissoidi* (Mem. della R. Acc. di Torino, vol. LV, ser. II) e nella mia Nota: *Sull'attrazione degli strati ellissoidali* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. XLI).

Il problema di Dirichlet per lo spazio interno all'ellissoide fu risoluto come è ben noto da Lamé coll'uso delle coordinate ellittiche, che lo condusse alla memorabile scoperta delle soluzioni semplici dell'equazione di Laplace, formate dal prodotto di tre identiche funzioni di ciascuna coordinata ellittica, colle quali soluzioni semplici mercè una serie infinita si esprime la soluzione cercata.

La scoperta di Lamé fu notevolmente perfezionata da Liouville, sia coll'osservare che i prodotti di Lamé sull'ellissoide si convertono con un cambiamento di variabili in funzioni sferiche, il che basta ad assicurare la

sviluppabilità in serie di tali prodotti di una funzione arbitrariamente data sull'ellissoide, sia nel considerare la seconda soluzione dell'equazione differenziale di Lamé per il fattore dipendente dal parametro degli ellissoidi omofocali. Questa soluzione, moltiplicata per gli altri due fattori considerati da Lamé, somministra infatti un'altra soluzione semplice dell'equazione di Laplace, che è armonica all'esterno dell'ellissoide; con queste armoniche elementari di seconda specie, mercè una serie infinita, si risolve per lo spazio esterno dell'ellissoide il problema di Dirichlet. Allo stesso risultato era pure giunto, pressochè contemporaneamente Heine [1].

Ma se da un canto i prodotti di Lamé di prima e seconda specie offrono un procedimento teoricamente soddisfacente ed elegantissimo per risolvere il problema di Dirichlet, rispettivamente all'interno ed all'esterno dell'ellissoide, dall'altro la legge della loro formazione è così involuta che malagevole ne riesce l'impiego nella risoluzione di problemi concreti.

Per ciò mi è sembrato plausibile il tentativo di sostituire ai prodotti di Lamé altre armoniche elementari la cui legge di formazione fosse esplicita e semplice.

Lo scopo è stato da me raggiunto considerando le derivate n^{me} della funzione potenziale U_n di un corpo ellissoidico la cui densità è:

$$n\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{n-1},$$

ove al solito con a, b, c sono indicati i tre semiassi dell'ellissoide.

Più precisamente nel secondo dei miei lavori sovra ricordati ho stabilito i seguenti teoremi.

Teorema A. *Se* $Q_n(x, y, z)$ *indica un polinomio armonico, omogeneo, del grado* n, *la funzione*

$$Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)U_n$$

è armonica all'interno ed all'esterno dell'ellissoide, e dà la funzione potenziale dello strato ellissoidale di densità:

$$h_n = -(-2)^{n-1} \cdot n!\, P \cdot Q_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right),$$

ove P *designa la distanza fra il centro ed il piano tangente all'ellissoide nel punto* (x, y, z).

[1] Cfr. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen* (2ª edizione).

Teorema B. *Per ogni numero intero n, scelti $2n+1$ polinomi armonici, omogenei, di grado n:*

$$Q_n^{(0)}, Q_n^{(1)}, \ldots, Q_n^{(2n)},$$

fra di loro linearmente indipendenti, si avranno in corrispondenza $2n+1$ armoniche ellissoidali indipendenti dell'n^{mo} ordine:

$$U_n^{(i)} = Q_n^{(i)}\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right) U_n \quad (i = 0, 1 \ldots, 2n),$$

ed ogni armonica entro e fuori dell'ellissoide si può rappresentare colla serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2n} \alpha_n^{(i)} U_n^{(i)},$$

ove le α indicano delle costanti.

Teorema C. *Sia f una funzione arbitrariamente data sull'ellissoide* (¹); *si ponga:*

$$\left.\begin{aligned} h_n^{(i)} &= -(-2)^{n-1}\, n!\, P \cdot Q_n^{(i)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) \\ A_n^{(i,j)} &= \int U_n^{(i)} h_n^{(j)}\, dS = \int U_n^{(j)} h_n^{(i)}\, dS = A_n^{(j,i)} \end{aligned}\right\} (i, j = 0, 1, \ldots, 2n),$$

ove dS indica l'elemento di superficie dell'ellissoide e le integrazioni vanno estese a tutto l'ellissoide; allora i coefficienti $\alpha_n^{(0)} \ldots \alpha_n^{(2n)}$ dello sviluppo dell'armonica che soll'ellissoide diviene uguale ad f si ottengono dalle $2n+1$ equazioni lineari:

$$\sum_{j=0}^{2n} \alpha_n^{(j)} A_n^{(i,j)} = \int f\, h_n^{(i)}\, dS \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, 2n),$$

il cui determinante è diverso da zero.

In particolare le funzioni $Q_n^{(0)}, Q_n^{(1)}, \ldots, Q_n^{(2n)}$ si possono sempre scegliere in guisa che risultino nulle tutte le $A_n^{(ij)}$ per $i \neq j$, con la qual scelta l'indicato *processo d'integrazione dà isolatamente i coefficienti α_n*. Tale scelta dipende dalla riduzione a somma di quadrati di una forma quadratica a $2n+1$ variabili. Le funzioni di Lamé appartengono a questa particolare categoria delle nostre armoniche ellissoidali.

In questo breve lavoro, premesse alcune proposizioni sui polinomi armonici, dò una nuova e più diretta dimostrazione dei teoremi fondamentali A

(¹) Le limitazioni di imporsi all'arbitrarietà della f sono quelle stesse che occorrono per dimostrare la sviluppabilità in serie di funzioni sferiche, da una funzione data sulla sfera.

e B. Quanto al teorema C rimando il lettore al § VIII della mia ricordata Nota inserita nel vol. XLI degli Atti della R. Acc. di Torino (pag. 538-541).

1. Stabiliamo anzitutto un lemma algebrico, che è utile nella teoria delle funzioni armoniche.

Se P_n *indica un polinomio omogeneo, a coefficienti reali, si possono determinare in un sol modo: a meno di fattori costanti il cui prodotto è l'unità n funzioni lineari reali* $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, *ed un altro polinomio reale* P_{n-2} *in guisa che risulti identicamente:*

$$(1) \qquad P_n(x, y, z) \equiv \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z) + (x^2 + y^2 + z^2)\, P_{n-2}(x, y, z).$$

Interpretate x, y, z come coordinate omogenee di un punto nel piano, consideriamo le curve:

$$P_n(x, y, z) = 0 \quad , \quad P_2(x, y, z) \equiv (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

le quali si intersecano in $2n$ punti imaginari due a due coniugati. Congiunta ciascuna intersezione colla propria coniugata avremo n rette reali:

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si ponga:

$$\pi_n = \prod_{i=0}^{n} (\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z),$$

e si consideri il fascio di curve:

$$P_n - \lambda \pi_n = 0,$$

il quale ha $2n$ punti base sulla conica: $P_2 = 0$.

Si determini λ in guisa che la corrispondente curva del fascio abbia a comune colla conica un altro punto fuori dei $2n$ anzidetti, la curva che così si ottiene si spezza nella conica ed in altra curva $P_{n-2} = 0$, sicchè detto λ_0 il parametro di tal curva avremo identicamente:

$$P_n - \lambda_0 \pi_n \equiv P_2 \,.\, P_{n-2}.$$

Si osservi che λ_0 è necessariamente reale giacchè i punti sovra $P_2 = 0$ sono due a due imaginari coniugati. Con ciò è dimostrata l'identità (1).

Interpretiamo x, y, z come coordinate ortogonali di un punto dello spazio e diciamo h_i la direzione i cui coseni sono proporzionali ad $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$; se in (1) cambiamo x, y, z in $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ avremo:

$$(1') \quad P_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv c \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \cdots \frac{\partial}{\partial h_n} + P_{n-2}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \Delta_2,$$

ove c indica una costante e le n direzioni $h_1 \dots h_n$ si possono a coppie invertire.

Di qui scende, come corollario: *una qualsiasi operazione derivatoria d'ordine n da effettuarsi sopra una funzione armonica, a meno di un fattore costante, equivale ad n derivazioni secondo n determinate direzioni.*

In particolare, essendo com'è notissimo:

$$P_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = \frac{Q_n(x, y, z)}{r^{2n+1}},$$

ove: $r = \sqrt{x^2 + y^2 = z^2}$ e Q_n indica un polinomio armonico omogeneo del grado n, risulta che, a meno di un fattore costante, qualunque polinomio armonico omogeneo del n^{mo} ordine è dato dalla formula:

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\frac{\partial}{\partial h_2}\cdots\frac{\partial}{\partial h_n}\frac{1}{r} = \frac{Q_n(x, y, z)}{r^{2n+1}}.$$

2. Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\frac{1}{r} = -\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z}{r^3}, \quad Q_1 = -(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z),$$

dunque:

$$Q_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = -\frac{Q_1}{r^3}.$$

Del pari si trova subito:

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\frac{\partial}{\partial h_2}\frac{1}{r} = \frac{3(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) r^2}{r^5};$$

$$Q_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = 3\frac{Q_2}{r^5},$$

e si dimostra ovviamente che sarà in generale:

$$Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = c_n\frac{Q_n(x, y, z)}{r^{2n+1}},$$

ove c_n indica una costante.

Basta provare che se la relazione è vera per $n = m$ lo sarà pure per $n = m + 1$. Posto:

$$\frac{Q_{m+1}}{r^{2m+3}} = \frac{\partial}{\partial h_{m+1}}\frac{\partial}{\partial h_m}\cdots\frac{\partial}{\partial h_1}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial h_{m+1}}\frac{Q_m}{r^{2m+1}}.$$

si ha subito:

$$Q_{m+1} = -(2m+1)\, Q_m \cdot (\alpha_{m+1} x + \beta_{m+1} y + \gamma_{m+1} z) + \frac{\partial Q_m}{\partial h_{m+1}} r^2,$$

dunque:

$$Q_{m+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = -(2m+2)\, c_m \frac{\partial}{\partial h_{m+1}} \frac{Q_m}{r^{2m+1}} = -(2m+1)\, c_m Q_{m+1};$$

sicchè si ha la formula generale:

$$Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = (-1)^n\, 1 \,.\, 2 \ldots (2n-1) \frac{Q_n(x\,,\,y\,,\,z)}{r^{2n+1}}\,.$$

3. Posto:

$$f_x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad , \quad f_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3\,,$$

come ho dimostrato nel § 2 della mia Memoria: *Sull'attrazione degli ellissoidi*, si ha identicamente:

$$\frac{1}{2^n \,.\, n!}\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^n f_x^n =$$
$$= f_{xy}^n + c_{n-2} f_{xy}^{n-2} f_x f_y + c_{n-4} f_{yx}^{n-4} f_x^2 f_y^2 + \cdots$$

ove le c sono delle costanti numeriche.

Indicata col simbolo Δ_2 l'operazione $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, si trova immediatamente:

$$f_{xy}^{n-2} f_y = \frac{1}{n(n-1)} \Delta_2 f_{xy}^n \;,\; f_{xy}^{n-4} f_y^2 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \Delta_2 \Delta_2 f_{xy}^n \,, \ldots$$

Orbene nella ricordata identità invece dei prodotti

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!} y_1^p\, y_2^q\, y_3^r \quad (p+q+r=n)\,,$$

si possono porre delle costanti qualunque $\alpha_{p,q,r}$; poniamo per questi prodotti rispettivamente i coefficienti delle $x_1^p\, x_2^q\, x_3^r$ in un polinomio armonico omogeneo del grado n: $Q_n(x_1, x_2, x_3)$. Allora f_{xy}^n diviene Q_n, e siccome $\Delta_2 Q_n = 0$, scritto r^2 invece di $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ si ha:

$$Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) r^{2n} = 2^n \,.\, n!\, Q_n(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3).$$

A questa identità applichiamo s volte l'operazione Δ_2 si conclude:

$$Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) r^{2(n-s)} = 0 \qquad (s = 1\,,\,2\,,\,3 \ldots).$$

Dunque se $Q_n(x_1, x_2, x_3)$ indica un polinomio armonico omogeneo del grado n^{mo}, posto $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ in luogo di x_1, x_2, x_3, si ha:

$$\begin{cases} Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\nu^n = 2^n . n!\, Q_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) \\ Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\nu^{n-s} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots) \\ \nu = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}. \end{cases}$$

4. La funzione potenziale del corpo ellissoidico di densità:

$$k = n\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{n-1}$$

è notoriamente:

$$U_n = \pi abc \int_{s_0}^{\infty} \frac{\mu^n ds}{R(s)},$$

$$\mu = 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}, \quad R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

ove s_0 indica lo zero, ovvero la maggior radice dell'equazione $\mu = 0$, secondochè il punto potenziato (x, y, z) è interno, ovvero esterno all'ellissoide.

Designando con $Q_n(x, x, z)$ un polinomio armonico, omogeneo del grado n^{mo}, e posto:

$$U'_n = \pi abc\, Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\int_{s_0}^{\infty} \frac{\mu^n ds}{R(s)}$$

si ha subito all'interno:

$$-\frac{\Delta_2 U'_n}{4\pi} = n\, Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)(1-\nu)^{n-1} = 0;$$

dunque U'_n *è la funzione potenziale di uno strato ellissoidale.*

La densità h_n di questo strato si calcola subito col teorema di Poisson e si trova facilmente, com'è spiegato al § 7 della mia Memoria:

$$h_n = -(-2)^{n-1} n!\, P . Q_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right).$$

Sovra l'ellissoide è lecito porre:

$$x = a \operatorname{sen}\theta \cos\omega, \quad y = b \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega, \quad z = c\cos\theta$$

e le θ e ω si possono interpretare come coordinate curvilinee.

Il significato di queste coordinate ausiliarie è ovvio.

Si considerino gli ellissoidi omofocali al dato e le loro traiettorie ortogonali. Si imagini un punto P che a partire dall'ellissoide fondamentale percorra all'esterno una di queste traiettorie.

I tre semiassi dell'ellissoide omofocale passante per P sono: $\sqrt{a^2+s_0}$, $\sqrt{b^2+s_0}$, $\sqrt{c^2+s_0}$, ed i tre rapporti $\frac{x}{\sqrt{a^2+s_0}}$, $\frac{y}{\sqrt{b^2+s_0}}$, $\frac{z}{\sqrt{c^2+s_0}}$ al muoversi di P non mutano; sicchè, quando P lungo la traiettoria va all'infinito, si avrà:

$$\begin{cases} \lim \frac{x}{\sqrt{a^2+s_0}} = \lim \frac{x}{r} = \operatorname{sen}\theta \cos\omega, \\ \lim \frac{y}{\sqrt{b^2+s_0}} = \lim \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega, \\ \lim \frac{z}{\sqrt{c^2+s_0}} = \lim \frac{z}{r} = \cos\omega, \end{cases}$$

cioè: θ e ω sono le coordinate sferiche della traccia di detta linea sulla sfera di raggio infinito.

L'espressione di h_n diviene:

$$h_n = (-1)^n 2^{n-1} . n! \, \mathrm{P} . \varphi_n(\theta, \omega),$$

ove φ_n designa la funzione sferica dell'ordine n corrispondente al polinomio armonico Q_n.

Sia data sull'ellissoide una distribuzione di *densità qualunque* che scriveremo sotto la forma: $h = \mathrm{P} . \psi$. La ψ si può riguardare come una funzione di θ e ω, arbitrariamente data sulla sfera di raggio uno, e sviluppare in una serie di funzioni sferiche di questi argomenti:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \cdots$$

Si assuma

$$\varphi_n = \frac{(-1)^n . \psi_n}{2^{n-1} . n!} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

e si considerino i corrispondenti polinomi armonici omogenei $\mathrm{Q}_n(x, y, z)$, ottenuti dalle φ_n ponendo in $\varrho^n \varphi_n$:

$$\varrho \operatorname{sen}\theta \cos\omega = x \;,\; \varrho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega = y \;,\; \varrho \cos\omega = z .$$

Detta r la distanza fra l'elemento $d\mathrm{S}$ ed il punto x, y, z si ha:

$$\mathrm{U} = \int \frac{h\, d\mathrm{S}}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{\psi_n \mathrm{P}\, d\mathrm{S}}{r} ;$$

dunque *lo sviluppo della funzione potenziale dello strato ellissoidale di densità h è*

$$U = U_0 + U'_1 + U'_2 + \cdots$$

ove

$$U'_n = \pi abc\, Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial x}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\int_{s_0}^{\infty}\frac{\mu_n\, ds}{R(s)}.$$

Questa serie, ammessa ben inteso la sviluppabilità della ψ in serie di funzioni sferiche, converge uniformemente all'esterno ed all'interno dell'ellissoide. Con ciò è dimostrato il teorema B.

Se invece di dare la densità della distribuzione sull'ellissoide, dell'armonica U si prescrivono i valori su di questo, lo sviluppo della U nelle nostre armoniche ellissoidali è somministrato dal teorema C, del quale teorema stimo superfluo di qui ripetere la dimostrazione.

5. Il caso particolare in cui l'ellissoide divenga una sfera offre una facile verifica dei risultati ottenuti.

Assunto:

$$a = b = c = 1,$$

si ha:

$$\mu = 1 - \frac{r^2}{1+s}, \quad \int\frac{\mu^n\, ds}{R(s)} = -\frac{2}{r}\int\left(1 - \frac{r^2}{1+s}\right)^n d\frac{r}{\sqrt{1+s}},$$

sicchè posto

$$v = \frac{r}{\sqrt{1+s}},$$

risulta:

$$\int\frac{\mu^n\, ds}{R(s)} = -\frac{2}{r}\left[v - n\frac{v^3}{3} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{v^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{v^{2n+1}}{2n+1}\right].$$

All'esterno della sfera avremo:

$$U_{n,i} = \frac{2\pi}{r}\left[1 - \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}\right] =$$

$$= \frac{2^{n+1}.\, n!}{1.3\ldots(2n+1)}\frac{\pi}{r}.$$

All'interno avremo invece:

$$U_{n,e} = 2\pi\left[1 - n\frac{r^2}{3} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{r^4}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{r^{2n}}{2n+1}\right];$$

e si verifica subito che:

$$\Delta_2 U_{n,i} = -4n\pi(1 - r^2)^{n-1} = -4\pi k.$$

Per mezzo delle formule dimostrate nei §§ 2 e 3 si trova immediatamente:

$$\left.\begin{aligned} U'_{n,e} &= Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) U_{n,i} = (-1)^n \frac{2^{n+1} . n!}{2n+1} \pi \frac{Q_n(x, y, z)}{r^{2n+1}} \\ U'_{n,i} &= Q_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) U_{n,i} = (-1)^n \frac{2^{n+1} . n!}{2n+1} \pi Q_n(x, y, z) \end{aligned}\right\};$$

sicchè tanto all'interno quanto all'esterno della sfera si ha:

$$\Delta_2 U'_n = 0 .$$

La densità dello stato sferico di funzione potenziale U'_n risulta per la nostra formula generale:

$$h_n = (-1)^n 2^{n-1} . n! \, Q_n(\operatorname{sen}\theta \cos\omega, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega, \cos\omega),$$

ove ora θ e ω sono le coordinate polari del punto sulla sfera.

D'altra parte, posto:

$$\varphi_n = \frac{4\pi}{2n+1} h_n ,$$

si ha com'è ben noto:

$$U'_{n,i} = r^n \varphi_n \quad , \quad U'_{n,e} = \frac{\varphi_n}{r^{n+1}} ,$$

formule che confermano quelle ottenute poc'anzi.

Astronomia. — *Osservazioni delle comete 1906 g ed h fatte all'equatoriale Steinheil dell'Osservatorio al Collegio Romano.* Nota del Socio E. Millosevich.

Cometa 1906 g.

Fu scoperta da H. Thiele a Kopenhagen la notte 10-11 novembre. L'astro fu trovato al Collegio Romano dal dott. E. Bianchi la notte 11-12 novembre, e fu osservato come segue:

1906 Novembre 11	$14^h\,27^m\,46^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	9 19 53. 89	(9^n.554)	(Bianchi).
δ » »	$+13°\,31'\,12''.5$	(0. 677)	
1906 Novembre 12	$15^h\,7^m\,57^s\frac{1}{2}$	R. C. R.	
α apparente cometa	9 24 25. 16	(9^n.488)	(Zappa)
δ » »	$+14°\,45'\,34''\,1$	(0. 652)	
1906 Novembre 14	$13^h\,33^m\,37^s$	R. C. R.	
α apparente cometa	9 33 15. 79	(9^n.624)	(Bianchi)
δ » »	$+17°\,9'\,58''.8$	(0. 683)	