ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Siamo così arrivati alla conclusione che anche questi ultimi mezzi escogitati per combattere il flagello della grandine non hanno alcuna efficacia. E coll'animo sereno e con completa convinzione sono stato in grado di proporre al Ministero di voler chiudere il periodo delle esperienze.

Ma non voglio e non posso lasciar passare questa occasione, senza ringraziare pubblicamente il mio assistente dott. Pochettino, il quale coadiuvato dal dott. Pacini ha diretto le esperienze stesse con molta fermezza, con molta intelligenza e con molta efficacia. Le relazioni, molto particolareggiate, sono pubblicate per conto del Ministero di Agricoltura.

Colgo in pari tempo questa occasione per ringraziare caldamente il Ministero dei mezzi posti a mia disposizione.

Il risultato finale di questa campagna grandinifuga, che è durata 5 anni, è interamente negativo; sarebbe certamente stato più piacevole il poter mettere al servizio del paese un congegno efficace contro uno dei grandi nemici dell'Agricoltura italiana; ma anche negativo com'è, questo risultato offre almeno la consolazione, che si può avvertire come su quella via non c'è nulla da sperare, e che dagli effetti di quel flagello conviene premunirsi con mezzi affatto diversi.

Matematica. — *Ricerche sulla teoria delle funzioni automorfe.* Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Le serie che il Poincaré introdusse nelle sue celebri Memorie degli Acta Mathematica, sono forse il più potente mezzo [1] di dimostrazione dell'esistenza di funzioni automorfe di n variabili complesse $x_1\, x_2 \ldots x_n$: funzioni cioè che rimangono invarianti quando le x subiscono le trasformazioni g di un gruppo G propriamente discontinuo. Esse sono date dalla formola

$$(1) \qquad \sum \mathrm{R}(gx_i)\left[\frac{\mathrm{D}(gx_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right]^m$$

dove con gx_i indichiamo le variabili trasformate delle x per l'operazione g, con $\frac{\mathrm{D}(gx_i)}{\mathrm{D}(x_i)}$ il Jacobiano della trasformazione, con R una funzione delle x, e la sommatoria va estesa a tutte le operazioni di G. Però, perchè tale costruzione sia valida, occorre dimostrare che per una conveniente scelta di m ed R: 1° le serie (1) convergono; 2° non sono identicamente nulle ed anzi

[1] Anche nel caso di una sola variabile il metodo del Klein, che pure illumina così vivamente la teoria delle funzioni automorfe, non serve a dimostrare i teoremi di esistenza colla stessa generalità di quello del Poincaré: poichè non è ancora dimostrato che esso possa applicarsi ai gruppi il cui poligono fondamentale ha infiniti lati.

almeno due di esse non differiscono solo per un fattore costante. Tale dimostrazione fu fatta per molti casi particolari; mi propongo qui di dare un teorema generale per una classe di gruppi proiettivi che comprende tutte quelle già note.

1. Chiamate $x_i = \xi_i + i\eta_i$ le variabili indipendenti, indicherò le variabili trasformate per l'operazione g con $gx_i = x'_i = \xi_i^{(g)} + i\eta_i^{(g)}$. Indicherò con a_0 la quantità coniugata di a. Σ_{2n} sarà lo spazio lineare in cui sono coordinate cartesiane le ξ_i ed η_i: ove occorra mettere in evidenza che le ξ_i ed η_i sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di x_i indicherò Σ_{2n} con $(\Sigma)_n$. Σ_{2n-h} è un qualunque spazio lineare subordinato a $2n-h$ dimensioni: quando h sia pari $=2k$ e le equazioni che determinano il Σ_{2n-2k} si possano scrivere come k equazioni lineari nelle x_i indicherò il Σ_{2n-2k} con $(\Sigma)_{n-k}$. Intenderò che i punti all'infinito formino un $(\Sigma)_{n-1}$ che indico con $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$; ciò non deve stupire se si ricorda che nel caso di una sola variabile complessa si intende che uno solo sia il punto all'∞; e che con una trasformazione lineare sulle variabili complesse si può fare in modo che un qualunque $(\Sigma)_{n-1}$ vada all'infinito.

2. Premesso ciò, si supponga che in un punto x di un campo fondamentale di G e nei punti equivalenti ad esso rispetto a G, la funzione $\mathrm{R}(x_i)$ sia sempre finita e che anzi sia sempre minore in valore assoluto di una costante M: sarà dimostrata la convergenza assoluta di (1) appena lo sia quella della serie

$$\Sigma\left[\frac{\mathrm{D}(gx_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right]^m. \tag{2}$$

Ed invero in tale ipotesi ogni termine di (1) è in modulo minore del corrispondente termine di (2) moltiplicato per M.

Ora è facile vedere che *appena sia soddisfatta la condizione:*

1°. *Si può descrivere una ipersfera* S *di raggio sufficientemente grande* r *tale che solo un numero finito di campi fondamentali abbiano punti fuori di* S;

la serie (2) *per* $m=2$ *converge per ogni punto* X *interno ad un campo fondamentale, non equivalente ad un punto all'infinito rispetto a* G *e tale che*

2° *si può trovare un intorno* α *di* X *in cui il rapporto tra il massimo ed il minimo di* $\left|\frac{\mathrm{D}(gx_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right|$ *nei punti di* α *è minore di una costante* ϱ *qualunque sia* g.

Basterà invero ripetere la prima dimostrazione del Poincaré. Infatti siccome X non è equivalente ad un punto all'infinito, esso non è neppure punto limite di tali punti, poichè questi riempiono (per la condizione 1ª) un numero finito di varietà a $2n-2$ dimensioni (trasformate di $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$ per le operazioni che portano i campi aventi punti fuori di S nel campo fondamentale cui appartiene X). Si potrà quindi prendere un intorno α del punto X sodisfacente alla condizione 2ª e tutto interno al campo fondamentale e non contenente punti equivalenti a punti all'infinito; il volume di tale intorno sarà

$$v(\alpha) = \int\int_{(\alpha)} \cdots \int\int d\xi_1 \ldots d\xi_n \, d\eta_1 \ldots d\eta_n .$$

Si indichi con $g\alpha$ l'intorno trasformato di α per g: tutti gli intorni $g\alpha$ non contengono punti all'∞ e siccome solo un numero finito di essi è fuori di S, si può trovare una sfera S' che li comprenda tutti: il volume dell'intorno $g\alpha$, sarà, se si indica con $\frac{D(\xi_i^{(g)} \eta_i^{(g)})}{D(\xi_i \eta_i)}$ il Jacobiano delle $\xi_i^{(g)} \eta_i^{(g)}$ rapporto alle $\xi_i \eta_i \, (i = 1 \ldots n)$,

$$v(g\alpha) = \int \cdots \int\int_{(g\alpha)} \cdots \int d\xi_1^{(g)} \cdots d\xi_n^{(g)} \, d\eta_1^{(g)} \cdots d\eta_n^{(g)} =$$
$$= \int \cdots \int\int_{(\alpha)} \cdots \int \left| \frac{D(\xi_i^{(g)}, \eta_i^{(g)})}{D(\xi_i, \eta_i)} \right| d\xi_1 \ldots d\xi_n \, d\eta_1 \ldots d\eta_n .$$

Considerando le ξ_i ed η_i come funzioni di $x_i, (x_i)_0$, si ha $\xi_i = \frac{1}{2}(x_i + (x_i)_0)$, $\eta_i = \frac{1}{2i}(x_i + (x_i)_0)$, $\xi_i^{(g)} = \frac{1}{2}(gx_i + (gx_i)_0)$, $\eta_i^{(g)} = \frac{1}{2i}(gx_i - (gx_i)_0)$, quindi

$$\left| \frac{D(\xi_i^{(g)}, \eta_i^{(g)})}{D(\xi_i, \eta_i)} \right| = \left| \frac{D(\xi_i^{(g)}, \eta_i^{(g)})}{D(gx_i, (gx_i)_0)} \right| \cdot \left| \frac{D(gx_i, (gx_i)_0)}{D(x_i, (x_i)_0)} \right| \cdot \left| \frac{D(x_i, (x_i)_0)}{D(\xi_i, \eta_i)} \right| .$$

Ma

$$\left| \frac{D(x_i, (x_i)_0)}{D(\xi_i, \eta_i)} \right| = \left| \frac{D(gx_i . (gx_i)_0)}{D(\xi_i^{(g)}, \eta_i^{(g)})} \right| = \frac{1}{\left| \frac{D(\xi_i^{(g)}, \eta_i^{(g)})}{D(gx_i, (gx_i)_0)} \right|},$$

$$\left| \frac{D(gx_i, (gx_i)_0)}{D(x_i, (x_i)_0)} \right| = \left| \frac{D(gx_i)}{D(x_i)} \frac{D((gx_i)_0)}{D((x_i)_0)} \right| = \left| \frac{D(gx_i)}{D(x_i)} \right|^2$$

quindi

$$v(g\alpha) = \int \cdots \int\int_{(\alpha)} \cdots \int \left| \frac{D(gx_i)}{D(x_i)} \right|^2 d\xi_1 \ldots d\xi_n \, d\eta_1 \ldots d\eta_n .$$

Si deduce che se n_g è il minimo di $\left| \frac{D(gx_i)}{D(x_i)} \right|$ in α si ha

$$v(g\alpha) > n_g^2 \int \cdots \int\int_{(\alpha)} \cdots \int d\xi_1 \ldots d\xi_n \, d\eta_1 \ldots d\eta_n = n_g^2 \, v(\alpha) .$$

Ma la serie $\sum v(g\alpha)$ è convergente poichè, essendo l'intorno α interno al campo fondamentale, tutti gli intorni $g\alpha$ sono esterni l'uno all'altro ed interni ad S' onde $\sum v(g\alpha) <$ vol S'; quindi ancora $\sum n_g^2$ è convergente. E poichè, se N_g è il massimo di $\left|\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right|$ in α, si ha $\frac{N_g}{n_g} < \varrho$, anche la serie $\sum N_g^2$ è convergente e quindi pure lo è $\sum\left|\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right|^2$, c. v. d.

Si deduce che *per gli stessi punti* X *la serie converge per* $m \geq 2$. Infatti siccome $\sum\left[\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right]^2$ converge, vi è solo un numero finito di termini di questa serie per cui $\left|\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right| > 1$. Quindi la serie (2) ha, per $m > 2$, i termini tutti finiti e, fatta astrazione per un numero finito di termini, minori di quella per $m = 2$; quindi ancor essa converge.

3. Prima di procedere allo studio più particolareggiato dell'ipotesi che G sia lineare, dobbiamo fare qualche osservazione sulla portata delle ipotesi fatte nella precedente dimostrazione.

1°. Abbiamo supposto il punto X interno al campo fondamentale di G. È evidente che la nostra dimostrazione vale ogni volta che il punto X appartiene ad un numero finito di campi fondamentali, per modo che si possa asserire che l'intorno α od uno qualunque dei suoi trasformati ha punti comuni solo con un numero finito di questi intorni medesimi.

2°. La ipotesi 1ª è essenziale nel precedente ragionamento perchè si possa affermare che la serie $\sum v(g\alpha)$ è convergente. Ma essa non è senza efficacia relativamente all'ipotesi fatta nel numero precedente per quanto riguarda la funzione $R(x_i)$. $R(x_i)$ avrà infatti necessariamente una varietà singolare a $P_{2(n-1)}$ dimensioni, e perchè sia legittima l'ipotesi che $R(x_i)$ resti inferiore in modulo a una quantità finita M in X e nei punti equivalenti a X occorre che il punto X ed i suoi trasformati non abbiano come punto limite alcun punto di $P_{2(n-1)}$. La possibilità di scegliere $R(x_i)$ in questo modo è evidente quando la condizione 1ª sia soddisfatta: basterà che $R(x_i)$ sia razionale intera.

3°. Per quanto precede, la serie (1) converge assolutamente ed uniformemente in α, e quindi rappresenta una funzione delle variabili complesse $x_1 x_2 \dots x_n$ prolungabile in tutta la regione (connessa) di Σ_{2n} che è ricoperta dai campi equivalenti al campo fondamentale in cui si trova X. Invero non esiste in questa regione di Σ_{2n} una varietà a $2n-1$ dimensioni in cui (1) diverga: poichè i punti in cui la serie può divergere sono: 1° punti equivalenti a punti di $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$ o punti limiti di essi, 2° punti appartenenti ad infiniti campi fondamentali. Questi ultimi punti non sono che sul contorno di un campo fondamentale e non riempiranno nessuna varietà a $2n-1$ dimensioni che non sia contorno della regione di cui parliamo [1]; quanto ai

[1] Le proprietà qui ammesse pei campi fondamentali e per le reti di tali campi sono generalmente soddisfatte: non entriamo qui in una più minuta discussione su ciò:

primi si osservi che i punti equivalenti a punti di $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$ internamente ad ogni campo fondamentale formano una varietà a non più di $2n-2$ dimensioni; e quindi essi od i loro punti limiti possono riempire una varietà a $2n-1$ dimensioni, solo quando i punti di questa siano punti limiti di infiniti campi fondamentali e cioè appartengano al contorno della regione di cui parliamo.

4°. Alla condizione 1ª si può sostituire la seguente condizione: *Preso un punto* X, *si può descrivere un intorno di* X *tale che esso ed i suoi trasformati siano interni ad una sfera* S *variabile con* X. *I punti che non soddisfanno a questa condizione formano una varietà a* $2(n-1)$ *dimensioni al più, internamente ad ogni campo fondamentale.* In particolare stanno quindi su una varietà a $2(n-1)$ dimensioni i punti trasformati di punti di $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$.

4. Passiamo ora a studiare più da vicino i gruppi lineari. Mostreremo che *in questo caso la condizione 2ª è conseguenza della 1ª* (od anche della condizione più ampia enunciata in 4°, n. 3).

Cominciamo col supporre che non sia G un gruppo misto, e cioè che non sia tale che le sue variabili si possano dividere in k sistemi tali, che ogni operazione di G si componga di più trasformazioni ognuna operante su uno di questi k sistemi.

Un'operazione di G si scriverà allora

$$gx_i = \frac{\sum a_{ik}\, x_k + a_i}{\sum b_k\, x_k + b} \qquad (i = 1 \dots n)$$

il denominatore essendo lo stesso per tutti gli indici i. Il Jacobiano di tale trasformazione sarà allora [1]

$$\frac{D(gx_i)}{D(x_i)} = \frac{1}{(\sum b_k\, x_k + b)^n}\,. \tag{4}$$

Cerchiamo il significato di tale Jacobiano. Si consideri il $(\Sigma)_{n-1}$ che ha per equazione $\sum b_k\, x_k + b = 0$; esso è per g portato in $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$. Posto $b_k = \beta_k + i\,\beta'_k$, $b' = \beta + i\,\beta'$ le sue equazioni reali sono

$$\sum \beta_k \xi_k - \sum \beta'_k \eta_k + \beta = 0$$
$$\sum \beta'_k \xi_k + \sum \beta_k \eta_k + \beta' = 0\,.$$

Ciascuna di queste equazioni rappresenta un Σ_{2n-1} e questi due Σ_{2n-1} si

come non discutiamo sotto quali condizioni si può parlare di campi fondamentali pel gruppo. Cfr. del resto su ciò Fubini, Annali di Mat. serie 3ª, vol. 12.

[1] Cfr. Fubini, *Sulle funzioni automorfe ed iperfuchsiane di più variabili indipendenti*, Annali di Matematica, vol. 10, ser. III. Una più semplice dimostrazione di ciò sarà data in un trattato del Fubini sulle funzioni automorfe, di prossima pubblicazione.

intersecano ortogonalmente nel nostro $(\Sigma)_{n-1}$. Quindi la distanza d di un punto qualunque $x_i = \xi_i + i\eta_i\,(i=1 \ldots n)$ dal $(\Sigma)_{n-1}$ è data da

$$d^2 = \frac{(\sum \beta_k \xi_k - \sum \beta'_k \eta_k + \beta)^2}{\sum(\beta_k^2 + \beta_k'^2)} + \frac{(\sum \beta'_k \xi_k + \sum \beta_k \eta_k + \beta')^2}{\sum(\beta_k^2 + \beta_k'^2)} = \frac{|\sum b_k x_k + b|^2}{\sum(\beta_k^2 + \beta_k'^2)}.$$

Quindi si deduce

$$(5) \qquad \frac{1}{|\sum b_k x_k + b|} = \frac{\sqrt{\sum(\beta_k^2 + \beta_k'^2)}}{d}.$$

Ciò posto, si consideri un punto X non equivalente ad un punto del $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$. Per la condizione enunciata in 4° n. 3 (e quindi in particolare se è soddisfatta la condizione 2ª) i punti che non soddisfanno a questa restrizione riempiono al più una varietà a $2(n-1)$ dimensioni. Si potrà quindi descrivere una ipersfera di centro X e raggio l tanto piccola che non contenga che punti soddisfacenti alle condizioni stesse che X; si prenda come intorno α di X l'ipersfera di centro X e raggio $\frac{l}{2}$. Comunque si fissi una trasformazione g di G, la minima distanza $\bar{d}$ di un punto di α dal $(\Sigma)_{n-1}$ trasformato di $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$ sarà $\bar{d} \geq \frac{l}{2}$. La massima distanza di un punto di α da uno degli stessi $(\Sigma)_{n-1}$ sarà $\mathrm{D} \leq \bar{d} + l$; quindi il rapporto della massima alla minima distanza dei punti di α da uno dei $(\Sigma)_{n-1}$ equivalenti a $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$ per una qualunque operazione g di G è < 3; e per (5) e (4) il rapporto del massimo al minimo valore del modulo di $\frac{\mathrm{D}(gx_i)}{\mathrm{D}(x_i)}$ nei punti di α è $< 3^n$. Quindi risulta quanto erasi enunciato.

Qualora il gruppo G sia un gruppo misto, le cose dette valgono ancora con poche modificazioni.

Siano in tal caso $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, \ldots, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$ i k sistemi di variabili, e sia la trasformazione g di G data dalle formule

$$gx_i^{(1)} = \frac{\sum a_{ij}^{(1)} x_j^{(1)} + a_j^{(1)}}{\sum b_j^{(1)} x_j^{(1)} + b^{(1)}}\,(i=1 \ldots n_1)\,,\; gx_i^{(2)} = \frac{\sum a_{ij}^{(2)} x_j^{(2)} + a_j^{(2)}}{\sum b_j^{(2)} x_j^{(2)} + b^{(2)}}\,(i=1 \ldots n_2)\,; \ldots ;$$

$$gx_i^{(k)} = \frac{\sum a_{ij}^{(k)} x_j^{(k)} + a_j^{(k)}}{\sum b_j^{(k)} x_j^{(k)} + b^{(k)}}\,(i=1 \ldots n_k)$$

e da questa trasformazione saranno portati all'infinito i k $(\Sigma)_{n-1}$ dati dalle equazioni:

$$\sum_1^{n_1}{}_j\, b_j^{(1)} x_j^{(1)} + b^{(1)} = 0\,,\; \sum_1^{n_2}{}_j\, b_j^{(2)} x_j^{(2)} + b^{(2)} = 0\,, \ldots,\; \sum_1^{n_k}{}_j\, b_j^{(k)} x_j^{(k)} + b^{(k)} = 0$$

(onde in tal caso converrebbe meglio considerare i punti all' infinito di $(\Sigma)_n$ come formanti k $(\Sigma)_{n-1}$). Alla (4) si sostituirà la formula

$$\frac{\mathrm{D}(gx_i)}{\mathrm{D}(x_i)} = \prod_1^k {}_f \frac{1}{[\sum b_j^{(f)} x_j^{(f)} + b^{(f)}]^{n_f}}.$$

E su tale espressione, in base alla formula (5), si potranno ripetere ragionamenti del tutto analoghi a quelli precedenti, e conchiudere che la nostra affermazione è vera ancora per tali classi di gruppi.

Avremo quindi:

Se un gruppo di operazioni lineari è propriamente discontinuo e se per una determinata rete di campi fondamentali è possibile descrivere un'ipersfera tale che solo un numero finito di campi fondamentali abbia punti fuori di essa;

o, più generalmente,

se per ogni punto della regione ricoperta dalla rete, il quale non appartenga ad una certa varietà a $2n-2$ dimensioni, si può trovare un intorno α tale che esso e tutti i suoi trasformati stiano entro una ipersfera conveniente (dipendente dal punto),

le serie (1) *del Poincaré sono convergenti e rappresentano* (ove si ammetta che non sono identicamente nulle) *funzioni delle variabili complesse $x_1 x_2 \ldots x_n$ esistenti nella regione ricoperta dai campi della rete medesima. Ed il rapporto di due di queste funzioni* (ove si ammetta che esse non sono solo differenti per un fattore costante) *rappresenta una funzione automorfa pel gruppo* G. *Pel gruppo* G *e per tutti i gruppi simili ad esso è quindi dimostrato il teorema di esistenza.*

5. È chiaro che le classi di gruppi per cui è nota la convergenza delle serie (1) rientrano nelle classi ora studiate. Essi sono invero:

1°. *Gruppi fuchsiani e kleiniani.* Sarà $n=1$. Il $(\Sigma)_{n-1}^\infty$ si riduce ad un punto: e la nostra condizione si riduce all'altra che questo punto sia un punto di propria discontinuità pel gruppo. A ciò ci possiamo sempre ridurre con una trasformazione lineare ([1]).

2°. *Gruppi iperfuchsiani.* Si possono sempre ridurre a trasformare in sè l'interno di una ipersfera $\sum x x_0 = 1$: quindi il $(\Sigma)_{n-1}^\infty$ è esterno a tutti i campi fondamentali relativi a punti interni all'ipersfera ([2]).

3°. *Gruppi fuchsiani e iperfuchsiani misti.* Si può fare in modo che il gruppo su ogni sistema di variabili trasformi in sè una ipersfera nello spazio subordinato in cui esse sono coordinate. Anche in tal caso

([1]) Poincaré, Acta Mathematica, vol. 1 e 3.

([2]) Picard, Acta Mathematica, vol. 1 e 4; Fubini, *Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane ecc.* ed *Applicazioni analitiche dei gruppi ecc.* Atti dell'Accademia Gioenia, serie 4ª, vol. XVII e *Sulle funzioni automorfe ed iperfuchsiane di più variabili indipendenti*, Annali di Matematica, tomo 10, serie 3ª.

quindi $(\Sigma)_{n-1}^{\infty}$ è esterno a tutti i campi fondamentali relativi a punti interni alla regione che ha tali ipersfere come proiezioni sugli spazî subordinati. Questi gruppi contengono i gruppi *iperabeliani* del Picard (¹).

Ma altri gruppi rientrano in tale classe. Ci limiteremo ad un esempio: sia $V(x x_0) = 0$ una equazione Hermitiana (²) nelle variabili x e nelle variabili coniugate x_0, che rappresenti in Σ_{2n} una varietà algebrica a $2n - 1$ dimensioni che divida il Σ_{2n} in due regioni una finita e l'altra infinita; e sia G un gruppo propriamente discontinuo (³) di trasformazioni lineari delle variabili che trasformi in sè la $V(x, x_0) = 0$: si potrà in tal caso evidentemente applicare o a G o al suo sottogruppo di indice 2 che trasforma in sè ciascuna delle due regioni, il teorema precedente e risulterà che per esso esistono funzioni automorfe.

6. Ci resta a dimostrare che le serie (1) non sono identicamente nulle. Infatti, preso un punto X in cui la serie (1) converga assolutamente, sarà finito il numero delle operazioni g per cui il Jacobiano $\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}$ è maggiore in valore assoluto di quello delle residue operazioni: sia esso k e siano $g_1 g_2 \dots g_k$ le sostituzioni corrispondenti: sia D il valore comune di $\left|\frac{D(g_j x_i)}{D(x_i)}\right|$ in X $(j = 1, 2, \dots k)$. Si avrà per $g \neq g_1, g_2, \dots, g_k$ $\left|\frac{D(gx_i)}{D(x_i)}\right| \leqq hD$ essendo $h < 1$.

Si supponga ora di considerare la serie

$$\sum R(x_i) \left[\frac{D(g\, x_i)}{D(x_i)}\right]^m \tag{6}$$

dove $R(x_i)$ soddisfaccia alla condizione che il minimo dei valori in X di

$$\left|\sum_{j=1\cdots k} \pm |R(g_j x_i)|\right|$$

per tutti i sistemi di segni possibili sia un numero $H \neq 0$: e supponiamo che questa serie sia identicamente nulla. Potremo scrivere allora

$$\sum_{j=1\cdots k} R(g_j\, x_i) \left[\frac{D(g_j\, x_i)}{D(x_i)}\right]^m = - \sum_{g \neq g_1 \cdots g_k} R(g\, x_i) \left[\frac{D(g\, x_i)}{D(x_i)}\right]^m;$$

(¹) Picard, *Sur les fonctions hyperabéliennes* Journal de Liouville, ser. IV, vol. I, 1885, Blumenthal, *Ueber Modulfunctionen von mehreren Veränderlichen*, Mathematische Annalen, vol. 56 e 58 e Fubini, loc. cit. e una Memoria di prossima pubblicazione negli Annali di Matematica.

(²) Voglio con ciò indicare che, scritta nelle variabili ξ ed η, l'equazione $V(x x_0) = 0$ sia a coefficienti reali. Delle equazioni che soddisfacciano alle condizioni del testo esistono evidentemente per es.: $(x_1 x_{10})^2 + (x_1 x_{10})(x_2 x_{20}) + (x_2 x_{20}) - 1 = 0$.

(³) Circa la discontinuità propria di questi gruppi vedi Fubini, *Sulla teoria dei gruppi discontinui*, Annali di Matematica, serie 3ª, vol. 11.

e poichè si vide che la serie (6) converge assolutamente, osservando che è

$$\left|\sum_{j=1\cdots k} \mathrm{R}(g_j x_i)\left[\frac{\mathrm{D}(g_j x_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right]^m\right| \geqq \mathrm{H}\,\mathrm{D}^m,$$

si avrà

$$\mathrm{HD}^m = k \sum_{g \mp g_1 \cdots g_k} |\mathrm{R}(g\,x_i)| \left|\frac{\mathrm{D}(g\,x_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right|^m$$

dove, poichè $\mathrm{H} \mp 0$, k è un numero $(<1) \mp 0$. Segue di qui:

$$\sum_{g \mp g_1 \cdots g_k} |\mathrm{R}(g\,x_i)| \left|\frac{\mathrm{D}(g\,x_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right|^{m_1} < h^{m_1-m}\,\mathrm{D}^{m_1-m} \sum_{g \mp g_1 \cdots g_k} |\mathrm{R}(g\,x_i)| \left|\frac{\mathrm{D}(g\,x_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right|^m =$$

$$= \frac{h^{m_1-m}}{k}\,\mathrm{D}^{m_1}\mathrm{H}.$$

Ossia, se si suppone m_1 tanto grande che sia $h^{m_1-m} < k$, il che è possibile perchè $h < 1$ e $k \mp 0$,

$$\left|\sum_{j=1\cdots k} \mathrm{R}(g_j x_i)\left[\frac{\mathrm{D}(g_j x_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right]^{m_1}\right| > \mathrm{HD}^{m_1} > \sum_{g \mp g_1 \cdots g_k} |\mathrm{R}(g\,x_i)| \left|\frac{\mathrm{D}(g\,x_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right|^{m_1} \geqq$$

$$\geqq \left|\sum_{g \mp g_1 \cdots g_k} \mathrm{R}(g\,x_i)\left[\frac{\mathrm{D}(g\,x_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right]^{m_1}\right|.$$

Quindi la serie $\sum \mathrm{R}(g\,x_i)\left[\frac{\mathrm{D}(g\,x_i)}{\mathrm{D}(x_i)}\right]^{m_1}$ non può essere nulla in X e quindi rappresenta realmente una funzione di $x_1\,x_2 \ldots x_n$.

7. Ci resterebbe a mostrare che i rapporti delle serie (1) non sono sempre costanti. È facile vedere che la dimostrazione che diede il Picard nella Memoria già citata degli Acta si estende con poche modificazioni, analoghe a quelle del numero precedente, al caso presente. Anzi tale metodo serve a dimostrarci di più che *si possono trovare n funzioni indipendenti automorfe rispetto a* G.