ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Meccanica. — *Sul problema derivato di Dirichlet, sul problema dell'elettrostatica e sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità.* Nota di G. LAURICELLA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Il metodo di Neumann per la risoluzione del *problema derivato di Dirichlet* (1) suggerisce il modo di risolvere lo stesso problema giovandosi del metodo di Fredholm per la risoluzione dell'ordinario *problema di Dirichlet* (2); giacchè questo metodo insegna a rappresentare una funzione armonica (quando è possibile) per mezzo di un doppio strato (3), e quello si fonda precisamente sulla trasformazione di uno *strato* in un *doppio strato*. La difficoltà, che si presenta nel metodo di Neumann (4), consiste nella dimostrazione della possibilità in ogni caso (per il problema che si studia) di tale trasformazione. Ebbene, i noti risultati di Fredholm sulle equazioni funzionali (5), possono servire, come qui mostrerò, a superare tale difficoltà e a darci nello stesso tempo la risoluzione del *problema fondamentale dell'elettrostatica*.

Le medesime considerazioni si possono ripetere circa all'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici. Così, nell'Art. II della presente Nota, dimostrerò l'esistenza degli integrali delle dette equazioni dell'elasticità, quando in superficie (del campo finito o infinito che si considera) sono dati i valori delle espressioni, che nelle mie due precedenti Note (6) indicavo con X_σ, Y_σ, Z_σ. Tali espressioni non sono precisamente quelle delle componenti di tensione; ma vi si rassomigliano molto; e non è improbabile che il problema analitico, che risolvo, possa essere utilizzato per la risoluzione del vero problema delle tensioni.

Si può pensare che il metodo, che adopero per risolvere il problema analitico testè enunciato, possa ripetersi senz'altro per la risoluzione del

(1) Qui considero per brevità il caso delle due dimensioni e faccio astrazione delle note considerazioni sulle funzioni armoniche coniugate, per la risoluzione del *problema derivato di Dirichlet* nel caso delle aree piane, allo scopo di comprendere il caso di un campo a tre o più dimensioni.

(2) *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*, Oefversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900, n. 1, Stockholm.

(3) Cfr. l'Art. I della mia Nota: *Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm...* (Rend. Acc. Lincei, seduta del 2 giugno 1906).

(4) Cfr. la mia Memoria: *Sull'integrazione delle equazioni della propagazione del calore*, Cap. I, § 4 [Mem. della Soc. it. delle Sc. (detta dei XL), ser. 3ª, t. XII].

(5) *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta mathematica, t. 27.

(6) Quella citata del 2 giugno e l'altra, che ha per titolo: *Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi* (Rend. Acc. Lincei, seduta del 22 aprile 1906).

problema analogo delle tensioni; ora ciò non è possibile, se si ha riguardo ai risultati fin qui noti sulle equazioni funzionali; poichè il *Kern* (¹) (secondo la denominazione di Hilbert) del quale faccio uso, dipendente appunto dalle espressioni X_σ, Y_σ, Z_σ, da me introdotte, ha nel suo campo di variabilità un punto di infinito del *primo* ordine; mentre il *Kern*, a cui dà luogo la considerazione delle espressioni delle componenti di tensione, ha nel suo campo di variabilità un punto di infinito del *secondo* ordine.

In ciò che segue indicherò con $(F)_1$ la Nota del Fredholm sul *problema di Dirichlet*, con $(F)_2$ quella sulle *equazioni funzionali*, e con i simboli $(L)_1$, $(L)_2$ rispettivamente (in ordine cronologico) le mie due citate Note.

Art. I. — *Problema derivato di Dirichlet e problema dell'elettrostatica.*

1. Sia $f(s)$ una qualsiasi funzione finita e continua dei punti di una linea piana C, assoggettata alla sola condizione (²):

$$\int_C f(s)\, ds = 0. \tag{1}$$

Come è noto, questa condizione è necessaria, se si vuole che $f(s)$ possa rappresentare i valori della derivata normale, nei punti di C, di una funzione armonica nel campo finito σ, limitato da questa linea.

Supposto che C soddisfaccia alle condizioni generali fissate al § 1 della $(L)_2$, si consideri lo *strato lineare*:

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_C \log r \,.\, f(s)\, ds.$$

Si ha, come è noto, indicando con n_0 la normale a C nel punto s_0,

$$\lim_{p=s_0} \frac{dU}{dn_0} = \frac{1}{2} f(s_0) + \frac{1}{2\pi} \int_C f(s) \frac{d \log r_0}{dn_0}\, ds, \tag{2}$$

$$\lim_{p'=s_0} \frac{dU}{dn_0} = -\frac{1}{2} f(s_0) + \frac{1}{2\pi} \int_C f(s) \frac{d \log r_0}{dn_0}\, ds. \tag{3}$$

Si trasformi la $U(x, y)$, considerata nei punti del campo infinito σ', in *doppio strato lineare*. Per questo è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione (³):

$$\int_C U(s) \,.\, \Psi_1(s)\, ds = 0. \tag{4}$$

(¹) La *funzione caratteristica*, secondo la denominazione del prof. Pincherle (Acta math., T. I, p. 156; Mem. della R. Acc. delle Sc. dell'Ist. di Bologna, T. III, S. 6ª, p. 143).

(²) Le notazioni, qui adottate, sono quelle introdotte nell'Art. I della $(L)_2$.

(³) Vedi: $(L)_2$, Art. I, § 3.

2. Per verificare la (4), studiamo dapprima la funzione $\Psi_1(s)$. I risultati del Fredholm (vedi $(F)_2$, § 6, n. 14) ci dànno che la $\Psi_1(s)$ soddisfa all'equazione funzionale omogenea:

$$0 = \Psi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_c \frac{d\log r_0}{dn_0}\,\Psi_1(s)\,ds\,.$$

Allora, posto:

$$W(x\,,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_c \log r\,.\,\Psi_1(s)\,ds\,,$$

si avrà, scrivendo la (2) relativa alla $W(x\,,y)$,

$$(2)' \qquad \lim_{p=s_0}\frac{dW}{dn_0} = 0\,;$$

e quindi sarà in tutti i punti $p \equiv (x\,,y)$ dell'area σ (i punti di s inclusi):

$$(5) \qquad W(x\,,y) = A \text{ (costante)}.$$

Dunque lo *strato lineare* $W(x\,,y)$ nei punti di C prende il valore costante A; ed inoltre, scrivendo la (3) relativa alla $W(x\,,y)$ e tenendo presente la (2)', risulta:

$$\lim_{p'=s_0}\frac{dW}{dn_0} = \Psi_1(s_0)\,.$$

Questo risultato per il caso delle tre dimensioni si può interpetrare nel seguente modo: *la funzione $\Psi_1(s)$ rappresenta la densità di una massa elettrica in equilibrio distribuita sulla superficie chiusa che si considera;* in altri termini *la funzione $\Psi_1(s)$ risolve il problema fondamentale dell'elettrostatica.*

3. Ciò premesso, risulta immediatamente dalla (5) e dalla (1), come si voleva dimostrare,

$$\int_c U(s)\,.\,\Psi_1(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_c \Psi_1(s)\,ds\int_c \log r_0\,.\,f(s')\,ds' =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_c f(s')\,ds'\int_c \log r_0\,.\,\Psi_1(s)\,ds = -A\int_c f(s')\,ds' = 0\,.$$

Verificata la (4), indichiamo con [1]:

$$V(x\,,y) = \frac{1}{\pi}\int_c \frac{d\log r}{dn}\,\varphi(s)\,ds$$

il *doppio strato lineare* secondo cui si trasforma nel campo σ' lo *strato lineare* $U(x\,,y)$; e si consideri la funzione armonica:

$$H(x\,,y) = U(x\,,y) - V(x\,,y)\,.$$

[1] Cfr. la $(L)_2$, Art. I, form. (4).

Poichè lo *strato lineare* $U(x, y)$, in forza della supposta continuità della $f(x)$, ammette le derivate normali nei punti di C e dalle sue due parti [cfr. le formole (2), (3)], poichè ancora il *doppio strato lineare* $V(x, y)$ nei punti di σ' coincide con la $U(x, y)$, avremo che questo *doppio strato lineare* ammetterà le derivate normali nei punti di C e dalla parte corrispondente al campo σ'; e quindi ancora, in forza della continuità della $\varphi(s)$ e di un noto teorema di Liauponoff [1], la $V(x, y)$ ammetterà le derivate normali nei punti di C dalla parte corrispondente al campo σ. Ciò posto, risulta finalmente dalle (2), (3) e dalle note formole sui *doppi strati lineari*:

$$\lim_{p=s_0} \frac{dH}{dn_0} = \lim_{p=s_0} \frac{dH}{dn_0} - \lim_{p'=s_0} \frac{dH}{dn_0} = \left(\lim_{p=s_0} \frac{dU}{dn_0} - \lim_{p'=s_0} \frac{dU}{dn_0}\right) - \\ - \left(\lim_{p=s_0} \frac{dV}{dn_0} - \lim_{p'=s_0} \frac{dV}{dn_0}\right) = f(s_0).$$

Quindi *la funzione* $H(x, y)$ *risolve il problema derivato di Dirichlet per l'area finita* σ.

Il *problema derivato di Dirichlet* per il campo infinito σ' si risolve nella medesima maniera. Avvertiremo in questo caso che, siccome per i campi finiti è sempre possibile rappresentare una funzione armonica per mezzo di un *doppio strato lineare* [2], così la condizione (1) non è necessaria, come per altro è notorio, e la discussione precedente si semplifica notevolmente.

Art. II. — *Integrazione delle equazioni dell'equilibrio elastico per dati valori di* $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$ *in superficie.*

4. Riprendendo qui le notazioni introdotte nella $(L)_1$ e nell'Art. II della $(L)_2$, e supponendo soddisfatte per la superficie σ le condizioni poste nella $(L)_1$, si considerino le funzioni (analoghe agli *strati*):

$$(6) \quad \begin{cases} A(x, y, z) = -\dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_\sigma (u' X_\sigma + v' Y_\sigma + w' Z_\sigma)\, d\sigma, \\ B(x, y, z) = -\dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_\sigma (u'' X_\sigma + v'' Y_\sigma + w'' Z_\sigma)\, d\sigma, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

dove $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$ *sono funzioni qualsiasi dei punti di* σ, *assoggettate alla sola condizione della continuità.*

[1] *Sur certaines questions qui se rattachent...*, Journal de Mathématiques, 1898 (pag. 299).

[2] Cfr. la $(F)_1$, § 2.

Le espressioni (9) della $(L)_1$, corrispondenti ad $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$, si possono scrivere:

$$(6)' \quad \begin{cases} L(x, y, z)_0 = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma(x, y, z)_0 \,.\, X_\sigma + Y'_\sigma(x, y, z)_0 \,.\, Y_\sigma + \\ \qquad\qquad + Z'_\sigma(x, y, z)_0 \,.\, Z_\sigma\} \, d\sigma, \\ M(x, y, z)_0 = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X''_\sigma(x, y, z)_0 \,.\, X_\sigma + \cdots\} \, d\sigma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

nelle quali si è posto:

$$X'_\sigma(x, y, z)_0 =$$

$$= \frac{1}{2+k}\left\{2 + 3k\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos n_0 x + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\cos n_0 y + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\cos n_0 z\right),$$

$$Y'_\sigma(x, y, z)_0 = X''_\sigma(x, y, z)_0 = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos n_0 x + \cdots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y''_\sigma(x, y, z)_0 = \frac{1}{2+k}\left\{2 + 3k\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos n_0 x + \cdots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Osservando che le espressioni $X'_\sigma(x, y, z)_0$, $Y'_\sigma(x, y, z)_0$, ... sono formate ciascuna del prodotto di una funzione finita e continua per l'espressione $\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos n_0 x + \cdots\right)$, e ponendo mente alla supposta continuità delle funzioni X_σ, Y_σ, Z_σ, risulta [1] che *le espressioni* $L(x, y, z)_0$, $M(x, y, z)_0$, ... *hanno un significato anche quando il punto* (x, y, z) *si suppone su* σ *in* p_0, ed inoltre:

$$(7) \quad \lim_{p=p_0} L(x, y, z)_0 = \tfrac{1}{2} X_\sigma(p_0) + L(p_0), \quad \lim_{p=p_0} M(x, y, z)_0 = \tfrac{1}{2} Y_\sigma(p_0) + M(p_0), \ldots$$

$$(8) \quad \lim_{p'=p_0} L(x, y, z)_0 = -\tfrac{1}{2} X_\sigma(p_0) + L(p_0), \ldots\ldots$$

5. Osserviamo che se u, v, w sono integrali delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici [eq. (1) della $(L)_1$] nel campo finito S, limitato

[1] Questo teorema è un'estensione di quello *sulla derivata normale di uno strato*, che abbiamo richiamato al § 1 per lo *strato lineare*. Esso si può dimostrare con considerazioni analoghe a quelle che conducono alla dimostrazione del menzionato teorema *sulla derivata normale*.

dalla superficie σ, le corrispondenti espressioni $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$ [le (4) della $(L)_1$] devono necessariamente verificare le condizioni:

$$(9) \qquad \int_\sigma X_\sigma \, d\sigma = \int_\sigma Y_\sigma \, d\sigma = \int_\sigma Z_\sigma \, d\sigma = 0 .$$

Ciò premesso, *supponiamo date ad arbitrio nei punti di σ tre funzioni finite e continue* $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$, *che verificano le condizioni* (9).

Si costruiscano con queste funzioni le espressioni $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$, introdotte al § precedente, le quali, come è evidente, soddisfanno da per tutto alle equazioni indefinite dell'equilibrio. Vediamo se queste espressioni, considerate nei punti (x, y, z) del campo infinito S', si possono rappresentare mediante le formole (10) della $(L)_2$ (analoghe ai *doppi strati*). Per ciò è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione [la (9) della $(L)_2$]:

$$(10) \quad \int_\sigma \{ A(\alpha, \beta) \, . \, \Psi_1(\alpha, \beta) + B(\alpha, \beta) \, . \, \Psi_1'(\alpha, \beta) + C(\alpha, \beta) \, . \, \Psi_1''(\alpha, \beta) \} \, d\sigma = 0 ,$$

Ora *questa condizione è sempre soddisfatta.* Infatti si noti anzitutto che, in virtù dei risultati di Fredholm [vedi: $(F)_2$, § 2, n. 10 e § 6, n. 14], le funzioni $\Psi_1(\alpha, \beta)$, $\Psi_1'(\alpha, \beta)$, $\Psi_1''(\alpha, \beta)$, introdotte nell'Art. II della $(L)_2$, soddisfanno al sistema di equazioni funzionali omogenee:

$$(11) \quad \begin{cases} 0 = \Psi_1(\alpha_0, \beta_0) - \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \{ X_\sigma'(\alpha_0, \beta_0 \, ; \, \alpha, \beta) \, \Psi_1(\alpha, \beta) + \\ \qquad + Y_\sigma'(\alpha_0, \beta_0 \, ; \, \alpha, \beta) \, \Psi_1'(\alpha, \beta) + Z_\sigma'(\alpha_0, \beta_0 \, ; \, \alpha, \beta) \, \Psi_1''(\alpha, \beta) \} \, d\sigma , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \end{cases}$$

dove le $X_\sigma'(\alpha_0, \beta_0 \, ; \, \alpha, \beta), \dots$ sono funzioni che si possono ottenere dalle espressioni $X_\sigma'(\alpha, \beta \, ; \, \alpha_0, \beta_0), \dots$, introdotte nelle $(L)_1$, $(L)_2$, scambiando le variabili α, β con le variabili α_0, β_0, oppure supponendo nelle espressioni $X_\sigma'(x, y, z)_0, \dots$, introdotte nel § precedente, che il punto (x, y, z) sia su σ in $p_0 \equiv (\alpha_0, \beta_0)$.

Allora, posto:

$$A_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \{ u' \, . \, \Psi_1(\alpha, \beta) + v' \, . \, \Psi_1'(\alpha, \beta) + w' \, . \, \Psi_1''(\alpha, \beta) \, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \{ u' \, . \, \Psi_1(\alpha, \beta) + u'' \, . \, \Psi_1'(\alpha, \beta) + u''' \, . \, \Psi_1''(\alpha, \beta) \} \, d\sigma ,$$

$$B_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \{ u'' \, . \, \Psi_1(\alpha, \beta) + \cdots \} \, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \{ v' \, . \, \Psi_1(\alpha, \beta) + \cdots \} \, d\sigma ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;$$

$$L_1(x, y, z)_0 = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \{ X_\sigma'(x, y, z)_0 \, . \, \Psi_1(\alpha, \beta) +$$
$$+ Y_\sigma'(x, y, z)_0 \, . \, \Psi_1'(\alpha, \beta) + \cdots \} \, d\sigma ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

si avrà, in virtù delle (7), scritte per le $L_1(x, y, z)_0, \ldots$, e delle (11),

$$(7)' \begin{cases} \lim\limits_{p=p_0} L_1(x, y, z)_0 = -\frac{1}{2}\Psi_1(\alpha_0, \beta_0) + L_1(\alpha_0, \beta_0) = \\ = -\frac{1}{2}\left(\Psi_1(\alpha_0, \beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha_0, \beta_0; \alpha, \beta) \cdot \Psi_1(\alpha, \beta) + \cdots\} d\sigma\right) = 0, \\ \lim\limits_{p=p_0} M_1(x, y, z)_0 = 0 \quad , \quad \lim\limits_{p=p_0} N_1(x, y, z)_0 = 0. \end{cases}$$

Ora le espressioni ai primi membri delle (7)′ rappresentano le $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$ [le (4) della $(L)_1$] corrispondenti agli integrali $A_1(x, y, z)$, $B_1(x, y, z)$, $C_1(x, y, z)$ delle equazioni dell'equilibrio, considerati nel campo S; per cui, in virtù del 2° risultato al § 5 della $(L)_2$, avremo:

$$(12) \quad \text{(in tutto S)} \quad A_1(x, y, z) = a \ , \ B_1(x, y, z) = b \ , \ C_1(x, y, z) = c$$

con a, b, c costanti; e quindi, osservando che le funzioni $A_1(x, y, z)$, $B_1(x, y, z)$, $C_1(x, y, z)$, analogamente agli *strati*, sono finite e continue anche quando il punto (x, y, z) attraversa la superficie σ, risulterà che *esse, considerate come funzioni dei punti* $p' \equiv (x, y, z)$ *del campo infinito* S′, *soddisfanno alle equazioni dell'equilibrio e nei punti di* σ *prendono rispettivamente i valori costanti* a, b, c.

Dalle (12) e dalle (9) risulta finalmente:

$$\begin{aligned} \int_\sigma \{A(\alpha, \beta) \cdot \Psi_1(\alpha, \beta) + B(\alpha, \beta) \cdot \Psi'_1(\alpha, \beta) + C(\alpha, \beta) \cdot \Psi''_1(\alpha, \beta)\} d\sigma = \\ = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \Psi_1(\alpha, \beta)\, d\sigma \int_\sigma (u' X_\sigma + v' Y_\sigma + w' Z_\sigma)\, d\sigma - \\ - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \Psi'_1(\alpha, \beta)\, d\sigma \int_\sigma (u'' X_\sigma + \cdots)\, d\sigma - \cdots = \\ = -\int_\sigma X_\sigma\, d\sigma \cdot \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \{u' \cdot \Psi_1(\alpha, \beta) + u'' \cdot \Psi'_1(\alpha, \beta) + u''' \cdot \Psi''_1(\alpha, \beta)\} d\sigma - \\ - \int_\sigma Y_\sigma\, d\sigma \cdot \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \{v' \cdot \Psi_1(\alpha, \beta) + \cdots\} d\sigma - \cdots = \\ = -a\int_\sigma X_\sigma\, d\sigma - b\int_\sigma Y_\sigma\, d\sigma - c\int_\sigma Z_\sigma\, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

6. Premesso questo risultato, siamo sicuri che le $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$ si possono rappresentare nei punti di S′ mediante le (10) della $(L)_2$; e così si potrà scrivere per i punti (x, y, z) di S′:

$$(13) \begin{cases} A(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma \cdot \varphi(\alpha, \beta) + Y'_\sigma \cdot \psi(\alpha, \beta) + Z'_\sigma \cdot \chi(\alpha, \beta)\} d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{cases}$$

dove le $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ soddisfano alle equazioni funzionali [confronta le (6) della $(L)_2$]:

$$-A(\alpha_0, \beta_0) = \varphi(\alpha_0, \beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \varphi(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma,$$

. . . . . .

. . . . . .

Ora si considerino le funzioni:

$$(14)\quad \begin{cases} u(x, y, z) = A(x, y, z) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma \cdot \varphi(\alpha, \beta) + Y'_\sigma \cdot \psi(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma, \\ v(x, y, z) = B(x, y, z) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X''_\sigma \cdot \varphi(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dalle (13) segue che le $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ nei punti $p' \equiv (x, y, z)$ del campo infinito S' sono identicamente nulle; sicchè le corrispondenti espressioni (4) della $(L)_1$, che indicheremo rispettivamente con $\overline{\overline{X}}_\sigma$, $\overline{\overline{Y}}_\sigma$, $\overline{\overline{Z}}_\sigma$, saranno nulle su tutta la superficie σ; e poichè le espressioni (9) della $(L)_1$ corrispondenti alle funzioni $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$, date dalle (6), ossia le $L(x, y, z)_0$, $M(x, y, z)_0$, $N(x, y, z)_0$, date dalle (6)', in virtù della supposta continuità (§ 5) delle X_σ, Y_σ, Z_σ, ammettono limiti determinati e finiti per $p' = p_0$ [cfr. le formule (8)], ne segue che anche le espressioni analoghe $P_1(x, y, z)_0$, $Q_1(x, y, z)_0$, $R_1(x, y, z)_0$, corrispondenti ai sottrattori che compariscono nelle (14), ossia alle funzioni:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma \cdot \varphi(\alpha, \beta) + Y_\sigma \cdot \psi(\alpha, \beta) + Z'_\sigma \cdot \chi(\alpha, \beta)\}\, d\sigma,$$

. . . . . .,

. . . . . .,

ammetteranno limiti determinati e finiti per $p' = p_0$; e quindi, in forza della continuità delle funzioni $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ e di un teorema, analogo a quello citato (art. I) di Liapounoff ed enunciato alla fine del § 3 della $(L)_1$, risulterà ancora che le $P_1(x, y, z)_0$, $Q_1(x, y, z)_0$, $R_1(x, y, z)_0$ ammettono limiti determinati e finiti per $p = p_0$.

Ciò premesso, indicando con $\overline{X}_\sigma$, $\overline{Y}_\sigma$, $\overline{Z}_\sigma$ le espressioni analoghe alle $\overline{\overline{X}}_\sigma$, $\overline{\overline{Y}}_\sigma$, $\overline{\overline{Z}}_\sigma$, considerate dalla parte di σ che guarda lo spazio finito S, ossia le espressioni (4) della $(L)_1$ corrispondenti agli integrali (14) delle equazioni dell'equilibrio, considerati nei punti $p \equiv (x, y, z)$ di S, avremo finalmente dalle (7), (8) e dalle (10) della $(L)_1$:

$$\overline{X}_\sigma(p_0) = \overline{X}_\sigma(p_0) - \overline{\overline{X}}_\sigma(p_0) = \lim_{p=p_0} \{L(x, y, z)_0 - P_1(x\ y, z)_0\} -$$

$$- \lim_{p'=p_0} \{L(x, y, z)_0 - P_1(x, y, z)_0\} = \{\lim_{p=p_0} L(x, y, z)_0 - \lim_{p'=p_0} L(x, y, z)_0\} -$$

$$- \{\lim_{p=p_0} P_1(x, y, z)_0 - \lim_{p'=p_0} P_1(x, y, z)_0\} = X_\sigma(p_0),$$

$$\overline{Y}_\sigma(p_0) = Y_\sigma(p_0) \quad , \quad \overline{Z}_\sigma(p_0) = Z_\sigma(p_0).$$

Adunque *le funzioni* $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, *date dalle formole* (14), *soddisfanno nei punti del campo* S *alle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici isotropi e, nei punti di* σ, *le corrispondenti espressioni* (4) *della* $(L)_1$ *coincidono con le funzioni arbitrariamente date* $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$.

Il problema analogo per il campo infinito S′ si risolve nella medesima maniera, con l'avvertenza che in questo caso le condizioni (9) non sono necessarie e le considerazioni precedenti si semplificano notevolmente.

Matematica. — *Su un lemma del Poincaré*. Nota del dott. Eugenio Elia Levi, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

1. Il Poincaré nella sua nota Memoria: *Sur les équations de la Physique Mathématique* (¹), enunciò il seguente teorema:

Si abbia una funzione della forma $f(x, y) = \alpha_1 f_1(x, y) + \alpha_2 f_2(x, y) + \cdots + \alpha_n f_n(x, y)$ *dove le* $f_i(x, y)$ *sono funzioni linearmente indipendenti del punto* (x, y) *mobile in un campo* D *e le* α_i *sono costanti arbitrarie. Si possono sempre scegliere le* α_i *in modo che, almeno quando* n *sia sufficientemente grande, il rapporto*

$$\frac{\iint_D \Delta_1 f \, dx \, dy}{\iint_D f^2 \, dx \, dy}$$

sia maggiore di un numero L_n *dipendente solamente dal campo* D *e tale che* $\lim_{n=\infty} L_n = \infty$.

Questo teorema posero a fondamento delle loro ricerche parecchi autori che dopo il Poincaré si occuparono del problema di Dirichlet ed in particolar modo del metodo di Neumann e della teoria delle funzioni fondamentali (²). Recentemente però il prof. Lauricella (³) mosse una notevole obiezione alla dimostrazione del Poincaré. Il Poincaré per giungere al teorema sopra enunciato dimostrava anzitutto il lemma preliminare seguente:

Se una funzione $f(x, y)$ *in un campo convesso* D *la cui massima corda non superi* l *soddisfa all'equazione* $\iint_D f(xy) \, dx \, dy = 0$ *si ha*

(¹) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1894, § III, pag. 70 e seg. Vedi anche la Memoria dell'American Journal, tomo XII, portante lo stesso titolo.

(²) Cfr. specialmente i lavori dello Steckloff, dello Zaremba, del Liapounoff.

(³) Lauricella, *Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici*. Annali di Matematica Serie 3ª, Vol. XI, 1903.