ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

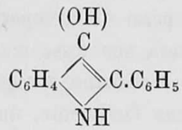
Riduzione con zinco ed acido acetico. — Il prodotto chinonico venne sciolto in alcool e sottoposto all'azione riducente della polvere di zinco in presenza di acido acetico, curando di raffreddare con ghiaccio. Il liquido venne in seguito versato in acqua, che determinò la separazione di una sostanza che raccolta su filtro, lavata con acqua, e purificata dal benzolo, si presenta in aghetti verdognoli. Fonde a 225°; colora in rosso una scheggia di abete bagnata con acido cloridrico e perciò bisogna ammettere che contenga ancora inalterato il nucleo indolico.

Gr. 0,0762 di sostanza diedero c. c. 4,5 di azoto alla temperatura di 16° e 752 mm.

In 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{11}NO$
N	6,89	6,69

È molto probabile che la sostanza sia il β-ossifenilindolo



ma la mancanza di prodotto non ci permise di sottoporla ad uno studio ulteriore.

Fisica matematica. — *Nuove osservazioni sul problema dell'induzione magnetica.* Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente T. LEVI-CIVITA.

In un recente lavoro [1], noi abbiamo esposto un metodo per risolvere il problema dell'induzione magnetica in casi abbastanza generali; e siamo pervenuti a esprimere la soluzione con una serie convergente.

Nella presente Nota, che può dirsi condotta sugli stessi concetti ai quali quel lavoro s'informa, noi giungeremo ad una serie che converge *più rapidamente* dell'altra, e mostreremo, nel procedimento destinato a giungervi, un artifizio, che non è soltanto limitato al caso nel quale qui lo applichiamo.

Il nostro problema consiste nel trovare una soluzione comune alle due equazioni indefinite

$$W(x_0, y_0, z_0) + \varphi(x_0, y_0, z_0) - k \int \frac{d\varphi(x, y, z)}{dn} \frac{1}{r} \, d\sigma = 0, \tag{1}$$

$$\Delta_2 \varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \tag{2}$$

[1] *Sull'induzione magnetica.* Rend. dei Lincei, 2° sem. 1906.

valide in un campo S, di contorno σ. Circa il campo S faremo alcune restrizioni. Intanto avvertiamo che il punto x_0, y_0, z_0 è un polo assunto ad arbitrio nel campo S, poi ancora che il punto x, y, z percorre il contorno σ, e dista r dal polo. L'integrale in $d\sigma$, elemento di σ che intornia il punto x, y, z, è esteso a tutto σ. La funzione W è una funzione nota, e la funzione φ si vuole invece determinare: nella sua determinazione consiste la risoluzione del nostro problema. La lettera k denota una costante *positiva*, e ciò corrisponde al caso dei corpi *magnetici*; per la validità del precedente metodo e di questo, tale ipotesi non sarebbe strettamente necessaria. Le restrizioni che si fanno circa il campo S non sono molto notevoli, ma sono tuttavia alquanto maggiori di quelle che ammettevamo nel precedente lavoro. Qui ammettiamo che esista un numero R, tale che una sfera di raggio fisso R, disposta in modo da essere tangente al contorno σ, in un arbitrario punto, da opportuna banda, contenga sempre nel suo interno tutto il campo S. Tale campo dovrà essere *chiuso e convesso*: il precedente metodo era, invece, valido anche se alcuni pezzi della superficie σ appartenessero a superficie rigate, purchè la curvatura non fosse mai negativa ([1]).

La soluzione φ che noi cerchiamo è regolare in S, e supponiamo che possa determinarsi, più o meno facilmente, un numero Φ, tale da non essere mai superato dai valori di $|\varphi|$ sul contorno σ.

Noi abbiamo veduto, nel precedente lavoro sullo stesso tema, che un procedimento semplicissimo lascia dedurre da (1) e da (2) l'equazione

$$(3)\qquad \varphi(x_0, y_0, z_0) = -\frac{W(x_0, y_0, z_0)}{4\pi k + 1} + \frac{k}{4\pi k + 1}\int \varphi(x, y, z)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma.$$

Ora noi *supponiamo che esista almeno una soluzione comune alle due equazioni* (1) *e* (2), e metteremo sotto forma esplicita (sviluppo in serie convergente) una funzione φ, avente la qualità di essere *un'arbitraria soluzione della* (3). Con ciò verremo *ad un determinato sviluppo*, e conchiuderemo che *è unica la soluzione della* (3). Ma tutte le soluzioni comuni alle due equazioni (1) e (2) si trovano certamente fra quelle di un'equazione che ne è conseguenza, dunque rimarrà stabilito che unica è la soluzione, supposta esistente, delle due equazioni simultanee (1) e (2). Questo era anche il concetto che ci guidava nel precedente metodo: qui, per chiarezza, lo abbiamo esposto con queste poche parole.

Staccandoci ormai dal precedente lavoro, trasformeremo l'equazione (3), e scriveremo, invece della (3), l'equazione

$$(4)\qquad \varphi = C - \frac{W}{4\pi k + 1} + \frac{k}{4\pi k + 1}\int\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{4R^2}\right)\varphi\,d\sigma,$$

([1]) Restrizioni analoghe a quelle che si fanno nella presente Nota si fanno anche nel mio lavoro *Sull'integrazione della Δ_2 in un campo chiuso e convesso*. Rend. Circ. matem. di Palermo, 1906.

la quale se ne ricava aggiungendo e togliendo la costante (non nota)

$$C = \frac{k}{4\pi k + 1} \int \frac{\varphi}{4R^2}\, d\sigma . \tag{5}$$

La grandezza costante R si assume, per vantaggio della pratica, più piccola che sia possibile, compatibilmente colla forma di σ.

Intanto l'espressione

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{4R^2} \right) d\sigma$$

è la differenza di due *angoli visuali* elementari, uno secondo il quale si vede $d\sigma$ dal polo x_0, y_0, z_0 (interno, come ogni altro punto di S, alla sfera di raggio R, tangente in $d\sigma$), l'altro secondo il quale si vede $d\sigma$ dal punto che, su questa sfera, è diametralmente opposto a $d\sigma$. Questa differenza, dunque, *non è mai negativa*. Ma la relazione, valida per un arbitrario polo x_0, y_0, z_0, interno a S o anche assunto sul contorno di S,

$$\int \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma \leqq 4\pi ,$$

insieme coll'altra

$$\int \frac{d\sigma}{4R^2} = \frac{\sigma}{4R^2} ,$$

dove σ denota l'area del contorno, lascia scrivere

$$\int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{4R^2} \right) d\sigma = 4\pi\alpha_1 , \quad \left| \int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{4R^2} \right) \varphi\, d\sigma \right| \leqq 4\pi\Phi\alpha_1 ,$$

dove α_1 denota un numero positivo < 1. Se ancora poniamo

$$\alpha = \frac{k}{4\pi k + 1} \int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{4R^2} \right) d\sigma ,$$

questa grandezza positiva α risulta minore di α_1; e anche molto minore, generalmente, di quella che figurava nella precedente Nota inserita nei Rendiconti di quest' illustre Accademia. In ciò consiste il privilegio del presente metodo.

Ormai basta tener presente quella Nota per vedere che la soluzione φ della (4) si esprime colla serie convergente

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi = {} & C - \frac{W}{4\pi k+1} + \frac{k}{4\pi k+1} \int \left(C - \frac{W}{4\pi k+1}\right) \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{4R^2}\right) d\sigma \\
& + \left(\frac{k}{4\pi k+1}\right)^2 \int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{4R^2}\right) d\sigma \int \left(C - \frac{W}{4\pi k+1}\right) \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{4R^2}\right) d\sigma \\
& \qquad + \left(\frac{k}{4\pi k+1}\right)^3 \int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{4R^2}\right) d\sigma \int \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{4R^2}\right) d\sigma \times \\
& \qquad \times \int \left(C - \frac{W}{4\pi k+1}\right) \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{4R^2}\right) d\sigma \\
& + \cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Rimane da determinarsi la costante

$$C(1+\alpha+\alpha^2+\cdots) = C\frac{1}{1-\alpha}.$$

Basta fare, per determinarla, un ragionamento molto semplice. Si ponga

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = F(x_0, y_0, z_0) + C\frac{1}{1-\alpha}. \tag{7}$$

Con ciò F è la funzione, tutta nota, che si ottiene annullando C nel secondo membro di (6). Se paragoniamo (7) con (5), otteniamo

$$\frac{4\pi k+1}{k} C = \frac{1}{4R^2}\int F(x, y, z)\, d\sigma + \frac{1}{4R^2}\int C \frac{1}{1-\alpha}\, d\sigma,$$

o anche

$$\frac{4\pi k+1}{k} C = \frac{1}{4R^2}\int F(x, y, z)\, d\sigma + \frac{C\sigma}{4R^2(1-\alpha)}.$$

Quest'equazione di primo grado determina la costante C. Con ciò il nostro problema rimane interamente risoluto.

È utile vedere come i recenti metodi di Volterra, Fredholm e Hilbert si prestino a risolvere il nostro problema, anche quando si tolgano le restrizioni relative a k e alla forma di S. La (3) e la (4) male si risolverebbero coll'applicazione *diretta* di questi metodi, anche perchè la funzione $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$, che dovrebbe servire da nucleo (*Kern*) dell'equazione integrale, non è continua se il polo giace sul contorno σ.

Invece della (2), noi scriviamo

$$(8) \qquad 4\pi\varphi = \int \left(\varphi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{d\varphi}{dn}\frac{1}{r} \right) d\sigma ,$$

poi cerchiamo una funzione ausiliare H, regolare in S, tale che sul contorno σ si annulli, e che la sua derivata normale $\frac{dH}{dn}$ vi assuma valore uguale a $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$. Vogliamo inoltre che $\varDelta_2 H$ sia in tutto il campo S una funzione continua: non è difficile, in generale, la ricerca di una fra le infinite funzioni che a ciò sodisfanno. Ma il lemma di Green lascia scrivere la formula

$$(9) \qquad \int \left(\varphi \frac{dH}{dn} - \frac{d\varphi}{dn} H \right) d\sigma + \int \varphi \varDelta_2 H \, dS = 0 ,$$

dove l'integrale in $dS = dx\, dy\, dz$ si estende a tutto S. Togliendo (9) da (8), e moltiplicando per $-k$ i due membri dell'uguaglianza che risulta, otteniamo

$$(10) \qquad -4\pi k\varphi = k \int \frac{d\varphi}{dn}\frac{1}{r}\, d\sigma + k \int \varphi \varDelta_2 H\, dS .$$

Sommando (10) con (1), possiamo scrivere

$$W + (1 + 4\pi k)\, \varphi + \int \varphi \varDelta_2 H\, dS = 0 .$$

Quest'equazione integrale si tratta facilmente cogli accennati metodi, e, quando ha soluzione unica, fornisce la soluzione comune alle due equazioni simultanee (1) e (2). L'arbitrarietà che ancora ci rimane per la funzione H può mettersi a profitto acciocchè, qualunque sia k, risulti sempre unica la soluzione di quest'equazione integrale, ma lo studio a ciò relativo ci porterebbe oltre i limiti che dobbiamo imporre a questo breve lavoro (¹).

(¹) Sarà bene consultare una Memoria del Picard, recentemente apparsa nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (1906, sett. ott.), nella quale si riducono agli accennati studi, sulle equazioni integrali, numerosi e notevoli problemi.