ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Adunque *le funzioni* $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$, *date dalle formole* (14), *soddisfanno nei punti del campo* S *alle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici isotropi e, nei punti di* σ, *le corrispondenti espressioni* (4) *della* $(\mathrm{L})_1$ *coincidono con le funzioni arbitrariamente date* $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{Y}_\sigma, \mathrm{Z}_\sigma$.

Il problema analogo per il campo infinito S' si risolve nella medesima maniera, con l'avvertenza che in questo caso le condizioni (9) non sono necessarie e le considerazioni precedenti si semplificano notevolmente.

Matematica. — *Su un lemma del Poincaré*. Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Il Poincaré nella sua nota Memoria: *Sur les équations de la Physique Mathématique* [1], enunciò il seguente teorema:

Si abbia una funzione della forma $f(x,y) = \alpha_1 f_1(x,y) + \alpha_2 f_2(x,y) + \cdots + \alpha_n f_n(x,y)$ *dove le* $f_i(x,y)$ *sono funzioni linearmente indipendenti del punto* (x,y) *mobile in un campo* D *e le* α_i *sono costanti arbitrarie. Si possono sempre scegliere le* α_i *in modo che, almeno quando* n *sia sufficientemente grande, il rapporto*

$$\frac{\int\int_{\mathrm{D}} \Delta_1 f \, dx \, dy}{\int\int_{\mathrm{D}} f^2 \, dx \, dy}$$

sia maggiore di un numero L_n *dipendente solamente dal campo* D *e tale che* $\lim_{n=\infty} \mathrm{L}_n = \infty$.

Questo teorema posero a fondamento delle loro ricerche parecchi autori che dopo il Poincaré si occuparono del problema di Dirichlet ed in particolar modo del metodo di Neumann e della teoria delle funzioni fondamentali [2]. Recentemente però il prof. Lauricella [3] mosse una notevole obiezione alla dimostrazione del Poincaré. Il Poincaré per giungere al teorema sopra enunciato dimostrava anzitutto il lemma preliminare seguente:

Se una funzione $f(x,y)$ *in un campo convesso* D *la cui massima corda non superi* l *soddisfa all'equazione* $\int\int_{\mathrm{D}} f(xy) \, dx \, dy = 0$ *si ha*

[1] Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1894, § III, pag. 70 e seg. Vedi anche la Memoria dell'American Journal, tomo XII, portante lo stesso titolo.

[2] Cfr. specialmente i lavori dello Steckloff, dello Zaremba, del Liapounoff.

[3] Lauricella, *Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici*. Annali di Matematica Serie 3ª, Vol. XI, 1903.

$\dfrac{\iint_D \Delta_1 f\,dx\,dy}{\iint_D f^2\,dx\,dy} > \dfrac{16}{9l^2}$. Dopo di che, preso un campo D *che si potesse spezzare in un numero finito p di campi convessi* D_i la cui massima corda fosse l, supposto $n > p$, determinando le α_i in modo che in ognuno dei campi D_i fosse soddisfatta l'equazione $\iint_{D_i} f\,dx\,dy = 0$ risultava che anche per l'intero campo si aveva $\dfrac{\iint_D \Delta_1 f\,dx\,dy}{\iint_D f^2\,dx\,dy} = \dfrac{16}{9l^2}$. Facendo crescere il numero p e con esso il numero n, si poteva rendere piccolo a piacere l; onde si otteneva il teorema enunciato.

Bisognava però ammettere a tal fine che un campo D si possa sempre spezzare in un numero finito di campi convessi: ora il Lauricella osservò che ciò non è sempre possibile. Basta infatti che il campo abbia un tratto del contorno regolare, ma tale che in ogni punto del tratto la tangente giaccia, almeno in un certo intorno del punto, entro il campo, perchè il campo non si possa più spezzare in un numero finito di campi convessi.

Nella presente Nota mi propongo di rimuovere, almeno per una estesa classe di campi, l'obbiezione del prof. Lauricella. In una Nota successiva mostrerò come i campi ordinariamente studiati rientrino nella classe di quelli per cui qui è dimostrato valido il teorema.

2. Comincerò perciò col sostituire al lemma preliminare del Poincaré, un nuovo lemma riferentesi ad una classe di contorni più estesa di quella dei contorni convessi.

Supponiamo che sia D un campo *convesso rispetto ad un suo punto interno* O, e cioè tale che ogni retta per O incontri il contorno di D in soli due punti. Possiamo supporre che O sia l'origine. Sia D_1 il massimo cerchio contenuto in D col centro nel punto O, l il suo raggio; D_2 l'area interna a D esterna a D_1; L la massima distanza di O dal contorno di D; sia τ l'area di $D_1 : \tau = \pi l^2$. Sia infine $f(x, y)$ una funzione che in D soddisfaccia all'equazione

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = 0\,. \tag{1}$$

Si indichi con $x'y'$ un qualunque punto interno a D_1: sarà in virtù di (1)

$$\iint_D f^2(x, y)\,dx\,dy < \iint_D [f(x, y) - f(x', y')]^2\,dx\,dy$$

e quindi ancora

$$
\text{(I)}\qquad
\begin{aligned}
\iint_{D} f^2(x\,,y)\,dx\,dy &< \frac{1}{\tau}\iint_{D_1} dx'\,dy' \iint_{D} [f(x\,,y) - f(x'\,,y')]^2\,dx\,dy = \\
&= \frac{1}{\tau}\iint_{D_1} dx'\,dy' \iint_{D_1} [f(x\,,y) - f(x'\,,y')]^2\,dx\,dy + \\
&+ \frac{1}{\tau}\iint_{D_1} dx'\,dy' \iint_{D_2} [f(x,y) - f(x',y')]^2\,dx\,dy\,.
\end{aligned}
$$

Esaminiamo successivamente gli integrali del secondo membro.

3. L'analisi relativa al primo integrale è quella stessa usata dal Poincaré. Basta infatti osservare che ponendo $\varphi(x\,,y) = f(x\,,y) - c$ si può disporre della costante c in modo che $\iint_{D_1} \varphi(x\,,\,y)\,dx\,dy = 0$; e l'integrale $\iint_{D_1} dx'dy' \iint_{D_1} [f(x\,,y) - f(x\,,y')]^2\,dx\,dy$ non differirà dall' integrale $\iint_{D_1} dx'\,dy' \iint_{D_1} [\varphi(x\,,\,y) - \varphi(x'\,,\,y')]^2\,dx\,dy$ poichè evidentemente $\varphi(x\,,y) - \varphi(x'\,,y') = f(x\,,y) - f(x'\,,y')$. Analogamente $\iint_{D_1} \Delta_1\,\varphi\,dx\,dy = \iint_{D_1} \Delta_1 f dx\,dy$. Ma allora si ha $\iint_{D_1} dx'dy' \iint_{D_1} [\varphi(x\,,\,y) - \varphi(x'y')]^2\,dx\,dy = 2\tau \iint_{D_1} \varphi^2(x\,,\,y)\,dx\,dy$; ora considerando che, essendo il campo D_1 un cerchio di raggio l, è convesso e la sua massima corda è $2l$, si potrà ad esso applicare il lemma del Poincaré pei campi convessi e si avrà $\dfrac{\iint_{D_1} \varphi^2(x\,,y)\,dx\,dy}{\iint_{D_1} \Delta_1\,\varphi\,dx\,dy} < \dfrac{9l^2}{4}$. E, di nuovo passando agli integrali relativi alla funzione $f(xy)$, si avrà

$$
\text{(II)}\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\iint_{D_1} dx'\,dy' \iint_{D_1} [f(x\,,y)) - f(x'\,,y')]^2\,dx\,dy = \\
&= 2\iint_{D_1} \varphi^2(x\,,\,y)\,dx\,dy < \frac{9}{2}\,l^2 \iint_{D_1} \Delta_1\,\varphi\,dx\,dy = \frac{9}{2}\,l^2 \iint_{D_1} \Delta_1\,f\,dx\,dy\,.
\end{aligned}
$$

4. Esaminiamo ora il secondo integrale di (I). Introduciamo perciò un sistema di coordinate polari di centro O: siano $r\,,\varphi$ le coordinate del punto $(x\,,y)$; $r'\,,\varphi'$ quelle di $(x'\,,y')$: sia R_φ il valore di r nel punto in cui il raggio

di anomalia φ incontra il contorno D. Si avrà

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\iint_{D_1} dx'\,dy' \iint_{D_2} [f(x,y) - f(x',y')]^2\, dx\, dy = \\
&= \frac{1}{\pi}\iint_{D_1} r'\,dr'\,d\varphi' \iint_{D_2} [f(r,\varphi) - f(r',\varphi')]^2\, r\, dr\, d\varphi = \\
&= \frac{1}{\pi}\iint_{D_1} r'\,dr'\,d\varphi' \iint_{D_2} [\{f(r,\varphi) - f(l,\varphi)\} + \\
&\qquad + \{f(l,\varphi) - f(r',\varphi')\}]^2\, r\, dr\, d\varphi .
\end{aligned}
$$

Ma si ha notoriamente $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$: quindi da (2) si deduce

$$
(\mathrm{III})\quad
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\iint_{D_1} dx'\,dy' \iint_{D_2} [f(x,y) - f(x',y')]^2\, dx\, dy \leq \\
&\leq \frac{2}{\pi}\iint_{D_1} r'\,dr'\,d\varphi' \iint_{D_2} [f(r,\varphi) - f(l,\varphi)]^2\, r\, dr\, d\varphi + \\
&+ \frac{2}{\pi}\iint_{D_1} r'\,dr'\,d\varphi' \iint_{D_2} [f(l,\varphi) - f(r',\varphi')]^2\, r\, dr\, d\varphi .
\end{aligned}
$$

Consideriamo il primo degli integrali del secondo membro: l'integrando in esso non dipende da r', φ': eseguendo l'integrazione rispetto a queste variabili, si avrà quindi

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi}\iint_{D_1} r'\,dr'\,d\varphi' \iint_{D_2} [f(r,\varphi) - f(l,\varphi)]^2\, r\, dr\, d\varphi = \\
&\qquad = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_l^{R_\varphi} [f(r,\varphi) - f(l,\varphi)]^2\, r\, dr .
\end{aligned}
$$

Ma si ha, procedendo in modo analogo a quello tenuto dal Poincaré nella citata Memoria,

$$f(r,\varphi) - f(l,\varphi) = \int_l^r \frac{\partial f}{\partial \beta}\, d\beta$$

dove con β intendiamo una variabile equivalente ad r. E quindi per il noto teorema di Schwarz $(\int \varphi\,\psi\, dx)^2 < \int \varphi^2\, dx \cdot \int \psi^2\, dx$, si avrà

$$[f(r,\varphi) - f(l,\varphi)]^2 = \left(\int_l^r \frac{\partial f}{\partial \beta}\, d\beta\right)^2 < (r-l)\int_l^r \left(\frac{\partial f}{d\beta}\right)^2 d\beta .$$

Sostituendo in (3)

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_l^{R_\varphi} [f(r,\varphi) - f(l,\varphi)]^2\, r\, dr < \\
&< 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_l^{R_\varphi} (r-l)\, r\, dr \int_l^r \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 d\beta = \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_l^{R_\varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 d\beta \int_\beta^{R_\varphi} (r-l)\, r\, dr = \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_l^{R_\varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \left[\frac{1}{3}\left(R_\varphi^3 - r^3\right) - \frac{1}{2}\, l(R_\varphi^2 - r^2)\right] dr .
\end{aligned}
$$

Ma il massimo valore di $\frac{1}{3}(R_\varphi^3 - r^3) - \frac{1}{2}l(R_\varphi^2 - r^2)$ si ha per $r = l$ ed allora esso è

$$\frac{1}{3}(R_\varphi^3 - l^3) - \frac{1}{2}l(R_\varphi^2 - l^2) < \frac{1}{3}R_\varphi^3 < \frac{L^3}{3}.$$

Quindi sarà

$$(5) \qquad 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_l^{R_\varphi} [f(r,\varphi) - f(l,\varphi)]^2\, r\, dr < \frac{2}{3}L^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_l^{R_\varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 dr.$$

D'altra parte, poichè è $\varDelta_1 f \geq \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2$ e nel campo D_2 è sempre $r > l$, si ha

$$(6) \qquad \iint_{D_2} \varDelta_1 f\, dx\, dy > \int_0^{2\pi} d\varphi \int_l^{R_\varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 r\, dr > l \int_0^{2\pi} d\varphi \int_l^{R_\varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 dr$$

Dalle (3) (5) (6) si deduce

$$(\mathrm{IV}) \qquad \frac{2}{\tau}\iint_{D_1} r'\, dr'\, d\varphi' \iint_{D_2} [f(r,\varphi) - f(l,\varphi)]^2\, r\, dr\, d\varphi < \frac{2}{3}\frac{L^3}{l}\iint_{D_2} \varDelta_1 f\, dx\, dy.$$

Passiamo al secondo integrale di (III). Si ha, poichè l'integrando è indipendente da r,

$$\frac{2}{\tau}\iint_{D_1} r'\, dr'\, d\varphi' \iint_{D_2} [f(l,\varphi) - f(r',\varphi')]^2\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$(7) \qquad = \frac{1}{\tau}\int_0^{2\pi} [R_\varphi^2 - l^2]\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^l [f(l,\varphi) - f(r',\varphi')]^2\, r'\, dr' \leq$$

$$\leq \frac{L^2}{\tau}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^l [f(l,\varphi) - f(r',\varphi')]^2\, r'\, dr'.$$

Questo ultimo integrale dipende dalle sole variabili r', φ, φ'. Facciamo il seguente cambiamento di coordinate:

$$\varphi = \varphi\,,\ \varrho = \sqrt{r'^2 + l^2 - 2lr'\cos(\varphi' - \varphi)}\,,\ \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{r'\operatorname{sen}(\varphi' - \varphi)}{l - r'\cos(\varphi' - \varphi)}.$$

In altri termini riferiamo il punto $M' \equiv (r', \varphi')$ ad un sistema di coordinate polari ϱ, ϑ avente per polo (l, φ) e per asse polare la congiungente O con (l, φ). Con ciò $f(l,\varphi) - f(r',\varphi')$ diviene una funzione $\psi(\varrho, \varphi, \vartheta)$, nulla per $\varrho = 0$; e la derivata di ψ rapporto a ϱ sarà la derivata di $f(x', y')$ secondo la congiungente i punti M' e (l, φ); quindi sarà $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right)^2 < \varDelta_1 f$,
$\psi(\varrho, \varphi, \vartheta) = \int_0^\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} d\varrho$.

L'integrale dell'ultimo membro di (7) diverrà

$$(8) \qquad \frac{L^2}{\tau}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2l\cos\vartheta} \psi^2(\varrho, \varphi, \vartheta)\, \varrho\, d\varrho.$$

Ma dalle precedenti osservazioni risulta $\psi^2(\varrho, \varphi, \varphi) = \left(\int_0^\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} d\varrho\right)^2 <$ $< \varrho \int_0^\varrho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)^2 d\beta$ dove con β si indica la stessa variabile che ϱ. Con ciò per l'integrale (8) si ha

$$\frac{L^2}{\tau} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2l\cos\vartheta} \psi^2(\varrho, \varphi, \vartheta)\, \varrho\, d\varrho <$$

$$(9) \qquad < \frac{L^2}{\tau} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2l\cos\vartheta} \varrho^2\, d\varrho \int_0^\varrho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)^2 d\beta =$$

$$= \frac{L^2}{3\tau} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2l\cos\vartheta} (8l^3 \cos^3\vartheta - \varrho^3) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right)^2 d\beta.$$

Ma $8l^3\cos^3\vartheta - \varrho^3 = (2l\cos\vartheta - \varrho)\,(4l^2\cos^2\vartheta + 2\varrho l\cos\vartheta + \varrho^2) \leq$ $\leq 12\, l^2(2l\cos\vartheta - \varrho)$. Dunque da (9) si ottiene ricordando che $\tau = \pi l^2$

$$\frac{L^2}{\tau} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2l\cos\vartheta} \varrho\psi^2(\varrho, \varphi, \vartheta)\, d\varrho <$$

$$(10) \qquad < \frac{4L^2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2l\cos\vartheta} (2l\cos\vartheta - \varrho) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right)^2 d\varrho <$$

$$< \frac{4L^2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2l\cos\vartheta} (2l\cos\vartheta - \varrho)\, \Delta_1 f\, d\varrho$$

$\Delta_1 f$ essendo preso nel punto M'.

Facciamo il seguente mutamento di variabili

$$\varrho_1 = 2l\cos\vartheta - \varrho\,, \; \vartheta = \vartheta\,, \; \varphi_1 = 2\vartheta - \varphi$$

ϱ_1, ϑ non saranno che le coordinate di M' nel sistema che ha per polo il punto (l, φ_1) e per asse polare la congiungente questo punto con O. L'ultimo integrale di (10) diverrà

$$\frac{4L^2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2l\cos\vartheta} \varrho_1\, \Delta_1 f\, d\varrho_1 .$$

Ma le ultime due integrazioni danno $\iint_{D_1} \Delta_1 f\, dx\, dy$, quindi questo integrale sarà uguale a $8L^2 \iint_{D_1} \Delta_1 f\, dx\, dy$. Radunando di qui e dalle (7)

(9) (10) segue

$$(\mathrm{V})\ \frac{2}{l}\int\!\!\int_{D_1} r'dr'd\varphi'\int\!\!\int_{D_2}[f(l,\varphi)-f(r',\varphi')]^2\,r\,dr\,d\varphi < 8\mathrm{L}^2\int\!\!\int_{D_1}\Delta_1 f\,dx\,dy.$$

5. Dalle disuguaglianze (I) (II) (III) (IV) (V) si deduce

$$\begin{aligned}&\int\!\!\int_{D} f(x\,,y)\,dx\,dy <\\ &<\left(\frac{9}{2}l^2+8\mathrm{L}^2\right)\int\!\!\int_{D_1}\Delta_1 f\,dx\,dy+\frac{2}{3}\frac{\mathrm{L}^3}{l}\int\!\!\int_{D_2}\Delta_1 f\,dx\,dy <\\ &< 13\mathrm{L}^2\int\!\!\int_{D_1}\Delta_1 f\,dx\,dy+\frac{2}{3}\frac{\mathrm{L}^3}{l}\int\!\!\int_{D_2}\Delta_1 f\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Quindi possiamo enunciare il lemma seguente:

Se una funzione $f(x\,,y)$ in un campo D convesso rispetto ad un punto O le cui distanze massima e minima dal contorno di D siano L ed l soddisfa all'equazione

$$\int\!\!\int_{D} f(x\,,y)\,dx\,dy = 0$$

si ha

$$\frac{\int\!\!\int_{D}\Delta_1 f\,dx\,dy}{\int\!\!\int_{D} f^2\,dx\,dy} > \mathrm{K}$$

dove K *è il minore dei due numeri* $\dfrac{3l}{2\mathrm{L}^3}\,,\ \dfrac{1}{13\mathrm{L}^2}$.

Questo lemma fa l'ufficio del lemma preliminare del Poincaré. Per passare da esso al teorema che abbiamo in vista, basterà ormai seguire il processo del Poincaré già accennato al n. 1: così il teorema sarà dimostrato per tutti quei campi che si possono spezzare in campi convessi rispetto ad un punto e tali di più che coll'impiccolire di questi si possa fare in modo che K diventi arbitrariamente grande. Ci riserviamo di mostrare in una Nota successiva che ciò è possibile per campi assai generali.