ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Fisica. — *Ricerche ulteriori sopra la conducibilità termica a basse temperature.* Nota del dott. PIETRO MACCHIA presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Fisico-chimica — *Ricerche sopra solventi inorganici a basse temperature. Disposizione sperimentale.* Nota di G. MAGRI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Scarica di un condensatore attraverso un solenoide abbracciante un mezzo conduttore.* Nota di F. PIOLA, presentata dal Corrispondente A. SELLA.

In una Nota precedente (1) ho esaminato come si distribuisce, sia il *campo magnetico* che il *flusso di induzione*, in un fascio di fili cilindrici conduttori posti nell'interno di un solenoide, parallelamente all'asse di questo. Nel caso particolare esaminato in quella Nota, la differenza di potenziale attiva agli estremi del solenoide era alternata *sinusoidale*, ora invece si suppone che essa sia dovuta alla *scarica di un condensatore*.

L'equazione che, in generale, deve essere verificata alla superf. di ciascuno dei cilindri costituenti il fascio è (2):

$$(1) \qquad 4\pi n_1 \varepsilon = \left[\mathrm{RX} + \mathrm{L}_1 \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t} + \mathrm{L}_2 \frac{2}{mr} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \varrho} \right]_{\varrho = r}$$

dove:

$$\varepsilon = f(t) \quad = \text{forza elettromotrice}$$
$$\mathrm{X} = f(t, \varrho) = \text{campo magnetico.}$$

L_1 = coeff. di autoinduzione del solenoide corrispondentem. alla porzione di sezione non occupata da materia conduttrice.

L_2 = valore che assumerebbe il coeff. di autoinduzione corrispondentem. alla porzione di sezione occupata dalla materia conduttrice se anche in questa

(1) Rend. Lincei, XVI, 1° sem. 1907, p. 35.
(2) L. c.

il campo si distribuisse uniformemente come nella non conduttrice, ossia se non si avessero le correnti di Foucault.

$R =$ resistenza *effettiva* del circuito elettrico
$r =$ raggio di ciascuno dei fili del fascio
$n_1 =$ numero spire per ogni cm.

$$m = \frac{4\pi\mu}{\delta}$$

con μ e δ rispettivamente *permeabilità* e *resistenza specifica* dei fili.

Detta Q la carica al tempo t del condensatore di capacità C che si scarica e γ la intensità della corrente al tempo stesso, avremo:

$$\varepsilon = \frac{Q}{C} \tag{2}$$

$$\gamma = -\frac{dQ}{dt} = \frac{X_{\varrho=r}}{4\pi n_1} = -C\frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{3}$$

Introducendo le (2) e (3) nella (1) e derivando rispetto a t avremo:

$$\frac{1}{C}X + R\frac{\partial X}{\partial t} + L_1\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{2L_2}{mr}\frac{\partial^2 X}{\partial t\,\partial\varrho} = 0 \tag{4}$$

per $\varrho = r$.

Poniamo nell'intervallo compreso fra $\varrho = 0$ e $\varrho = r$, come fece il Fourier (¹) nella propagazione del calore:

$$X = \sum_{h=1}^{h=\infty} A_h J_0\left(\frac{\sigma_h\varrho}{r}\right) e^{-\frac{\sigma_h^2 t}{mr^2}} \tag{5}$$

dove le J_0 sono le funzioni di Bessel, di 1ª specie e d'ordine zero, dell'argomento $\frac{\sigma_h\varrho}{r}$, le σ_h hanno i valori che si ricavano dalla (4) e le A_h sono costanti opportunamente scelte colle condizioni ai limiti che, in particolare, potranno essere, al tempo $t = 0$: 1° che il campo magnetico X abbia valore nullo in tutta la sezione di ciascun filo del nucleo; 2° che il flusso di induzione traverso la sezione di ogni filo sia nullo; 3° che la carica iniziale Q_0 del condensatore sia data; inoltre, per qualunque valore del tempo; 4° che il campo non diventi infinito.

Introducendo la (5) nella (4) avremo per qualunque valore del tempo:

$$\sum A_h \left\{\left(\frac{1}{C} - \frac{R\sigma_h^2}{mr^2} + \frac{L_1\sigma_h^4}{m^2r^4}\right)J_0 - \frac{2L_2\sigma_h^3}{m^2r^4}J_0'\right\}_{\varrho=r} e^{-\frac{\sigma_h^2 t}{mr^2}} = 0$$

(¹) Oeuvres, Paris 1888, vol. 1°, cap. 6°.

per cui le σ_h dovranno soddisfare alla equazione:

$$\left(L_1 J_0 - \frac{2 L_2 J_0'}{\sigma_h}\right) x^2 - R J_0 x + \frac{1}{C} J_0 = 0 \tag{6}$$

avendo posto

$$x = \frac{\sigma_h^2}{m r^2}.$$

Consideriamo due casi limiti.

Supponiamo da prima che L_2 sia tanto grande da poter trascurare in confronto del termine che lo contiene gli altri termini dell'equazione (6). Le soluzioni saranno allora approssimativamente quelle della equazione:

$$J_0'(\sigma) = 0 \tag{7}$$

che sappiamo essere infinite e tutte reali, ossia [1]:

$$\sigma = 3,8 \quad 7,0 \quad 10,2 \quad 13,3 \ \ldots$$

Se invece L_2 è molto piccolo, caso che si avvererà quando in un solenoide di grande raggio vi siano pochi fili sottili, la (6) si sdoppia nelle altre due:

$$J_0(\sigma) = 0 \tag{8}$$

$$C L_1 x^2 - C R x + 1 = 0 \tag{9}$$

la prima delle quali ammette infinite soluzioni tutte reali e cioè [2]:

$$\sigma = 2,4 \quad 5,5 \quad 8,7 \quad 11,8 \ldots$$

mentre la 2ª non è che l'equazione che lord Kelvin ottenne supponendo che nella scarica del condensatore il flusso di induzione magnetica si distribuisse uniformemente nel mezzo abbracciato dal circuito di scarica. Essa indica come è noto che, quando si ha:

$$R < 2\sqrt{\frac{L_1}{C}}, \tag{10}$$

il fenomeno è *oscillatorio smorzato*.

È da notare che l'aver supposto L_2 trascurabile, non implica aver supposto mancar assolutamente il mezzo conduttore nel solenoide, poichè in tal caso le correnti di Foucault non esisterebbero ed il campo magnetico nell'interno sarebbe uniforme o, in altre parole, mancherebbero nella (5) i fattori J_0 e quindi l'equazione (8) non avrebbe più significato: le sole soluzioni accettabili sarebbero quelle della (9).

(1) Lommel, *Bessel'schen Functionen*. Leipzig 1868, Tafel I.
(2) Lommel, loc. cit.

In generale la (6) ammette un numero infinito di radici reali poichè il suo 1° membro, al crescer di σ da 0 ad ∞, cambia di segno un numero infinito di volte. Infatti poichè fra 2 valori successivi σ_1 e σ_2 di σ, fra gli infiniti reali che rendono $J_0(\sigma)=0$, ne esiste uno, od un numero dispari, che rendono $J_0'(\sigma)=0$ (teorema di Rolle), fra i 2 valori σ_1 e σ_2 il 1° membro della (6), cambierà di segno. Le regioni nelle quali cadono le successive radici reali sono facilmente determinabili poichè il 1° membro della (6) ha i segni seguenti:

$$\begin{array}{cccc} \text{pei } \sigma = & 2{,}4 & 5{,}5 & 8{,}6\ldots \\ & + & - & + \end{array}$$

Ma, quando la resistenza del circuito non sia troppo grande, altre radici interessano più di quelle sopra indicate ed è di queste che, nel seguito, più specialmente vorremo occuparci.

Per valori molto grandi di σ (¹) si ha:

$$J_0'(\sigma) = -i\,J_0(\sigma).$$

Introducendo questa condizione nella (6) e ponendo

$$\sigma = i\sqrt{m}\,r\,y,$$

dividendo per $J_0(\sigma)$, si scorge che altre soluzioni potranno esistere oltre quelle considerate e saranno approssimativamente quelle della equazione algebrica di 4° grado:

$$L_1 y^4 + \frac{2}{\sqrt{m}\,r} L_2 y^3 + R y^2 + \frac{1}{C} = 0 \tag{11}$$

e tanto più vicine al vero quanto più elevato sarà il valore delle radici stesse.

Supponendo di essere nelle condizioni nelle quali si può trascurare L_1 e ponendo:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\sqrt{m}\,r} L_2 C \\ a_1 = RC \end{cases} \tag{12}$$

$$z = y + \frac{a_1}{3a_0},$$

la (11) diviene:

$$z^3 + pz + q = 0 \tag{13}$$

(¹) Heine, *Kugelfunctionen*, Berlin 1878, vol. 1°, pag. 248; J. J. Thomson, Rec. Res., Oxford 1893, pag. 348.

con:

$$p = -\frac{a_1^2}{3a_0^2} \quad , \quad q = \frac{2a_1^3 + 27a_0^2}{27a_0^3} .$$

Ora:

$$A = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$$

è sempre *positivo*, quindi la (13) ammette sempre una radice reale z_0 e 2 complesse coniugate z' e z''. Avremo:

$$z_0 = 2u \quad , \quad z' = u + iv \quad , \quad z'' = u - iv$$

ossia:

$$-\frac{\sigma_0^2}{mr^2} = \left(2u - \frac{a_1}{3a_0}\right)^2$$

$$-\frac{\sigma'^2}{mr^2} = h + ik$$

$$-\frac{\sigma''^2}{mr^2} = h - ik$$

da cui:

$$\sigma_0 = i\sqrt{m}\, r \left(2u - \frac{a_1}{3a_0}\right)$$

$$\sigma' = \sqrt{m}\, r \left\{ -v + i\left(u - \frac{a_1}{3a_0}\right)\right\} = \alpha + i\beta$$

$$\sigma'' = \sqrt{m}\, r \left\{ v + i\left(u - \frac{a_1}{3a_0}\right)\right\} = \alpha - i\beta$$

avendo posto:

$$h = \left(u - \frac{a_1}{3a_0}\right)^2 - v^2 \quad , \quad k = 2\left(u - \frac{a_1}{3a_0}\right) v$$

con:

$$u = \frac{M + N}{2} \quad , \quad v = \sqrt{3}\,\frac{M - N}{2}$$

ed

$$M = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{A}} \quad , \quad N = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{A}} .$$

Per le radici complesse coniugate è facile dimostrare che si ha sempre:

$$\text{mod}\,(\alpha \pm i\beta) > \sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}\, mr^2}{1 + \sqrt[3]{2}}}\ \sqrt[3]{2\left(\frac{\sqrt{m}\, r\, R}{6\, L_2}\right)^3 + \frac{\sqrt{m}\, r}{2 L_2 C}}$$

per cui, qualunque siano i valori della resistenza e dell'autoinduzione del circuito, si potrà sempre scegliere la capacità C del condensatore tanto piccola da rendere mod $(\alpha \pm i\beta)$ grande ad arbitrio.

Determinazione dei coefficienti. — La condizione che il campo non diventi infinito, per qualunque valore del tempo, ci permette intanto di porre uguale a zero nella (5) il coefficiente relativo alla soluzione σ_0, poichè $-\frac{\sigma_0^2}{mr^2}$ risulta sempre positivo.

In quanto alle 2 radici complesse si trova che la parte reale h, della espressione che compare a moltiplicare il tempo nell'esponenziale, è negativa, fino a quando si ha:

$$\text{(14)} \qquad R < 3 \sqrt[3]{\frac{2L_2^2}{25\,mr^2\,C}}$$

e solo quando questa disuguaglianza sarà verificata, i coefficienti dei 2 termini complessi dovranno essere presi differenti da zero.

La verificazione della (14) starà ad indicare che lo sviluppo (5) del campo conterà 2 termini periodici smorzati rispetto al tempo, ossia che la scarica del condensatore sarà periodica smorzata. È notevole la differente forma che assume il criterio, per giudicare sulla esistenza o meno delle oscillazioni in questo caso della produzione di correnti indotte nella massa ed in quello nel quale tali correnti non si abbiano (10). La verifica sperimentale di questo risultato sarà oggetto di un prossimo studio.

I coefficienti A′ e A″ dei termini complessi saranno quantità complesse coniugate, poichè sono tali le funzioni di Bessel di variabili complesse coniugate che li moltiplicano e poichè la somma dei termini stessi deve essere reale.

Porremo:

$$A' = A + iB \quad , \quad A'' = A - iB$$

$$J_0\left(\frac{\sigma'\varrho}{r}\right) = U(\varrho) + iV(\varrho) \ , \quad J_0\left(\frac{\sigma''\varrho}{r}\right) = U(\varrho) - iV(\varrho)$$

$$J_0(\sigma') = U_0 + iV_0 \qquad , \quad J_0(\sigma'') = U_0 - iV_0$$

ed indicheremo, al solito, con un apice le derivate prime.

Le 3 condizioni che devono essere verificate per $t = 0$ daranno le 3 equazioni:

$$\text{I} \qquad \sum A_s J_0\left(\frac{\sigma_s \varrho}{r}\right) + 2AU(\varrho) - 2BV(\varrho) = 0 \quad \text{per qualunque valore di } \varrho,$$

$$\text{II} \qquad \sum \frac{A_s}{\sigma_s} J_0'(\sigma_s) + 2\,\frac{\alpha(AU_0' - BV_0') + \beta(AV_0' + BU_0')}{\alpha^2 + \beta^2} = 0$$

$$\text{III} \qquad mr^2 \sum \frac{A_s}{\sigma_s^2} J_0(\sigma_s) - 2\,\frac{h(AU_0 - BV_0) + k(AV_0 + BU_0)}{h^2 + k^2} = 4\pi n_1 Q_0,$$

avendo indicato con le σ_s le soluzioni reali della (6) e con Q_0 la carica iniziale del condensatore.

Dalle II e III ricaveremo i valori di A e B, che introdotti nella I ci daranno una equazione contenente le sole A_s che dovrà essere verificata per qualunque valure di ϱ. La determinazione delle A_s potrà essere fatta con artifici dei quali si hanno frequenti esempi nella analisi, ma su di esse per ora non intendiamo fissare la nostra attenzione.

Campo oscillatorio. — Quando è verificata la condizione (14) per la quale h riesce negativa, le soluzioni complesse della (6) ci indicano che il campo magnetico, per ogni punto del nucleo, è *oscillatorio smorzato* con periodo

$$T = \frac{2\pi}{k}. \tag{15}$$

In quanto allo smorzamento non potremo dire sia dato da h poichè per esso dovranno contribuire anche tutti gli altri termini aperiodici della serie (5).

Il periodo $T = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{\left(u - \frac{a_1}{3a_0}\right)v}$ dipende dai varî elementi del circuito di scarica e del *mezzo* che questo abbraccia e nel quale si producono le correnti di Foucault. Il periodo dipende dal *mezzo* in quanto k contiene esplicitamente ed implicitamente a_0. Questo coefficiente (12) è proporzionale ad L_2, che è alla sua volta proporzionale a μ, ed è inversamente proporzionale a $\sqrt{m} = \sqrt{\frac{4\pi\mu}{\delta}}$ per cui, indicato con a un coefficiente indipendente dalla natura del *mezzo*, potrà porsi:

$$a_0 = a\sqrt{\mu\delta}.$$

Potrebbe analizzarsi in generale come al variare di $\sqrt{\mu\delta}$ venga a variare il periodo della scarica, ma ci accontenteremo di veder ciò nel caso nel quale sia trascurabile la resistenza elettrica del circuito. In tal caso si trova facilmente

$$k = -\frac{\sqrt{3}}{2}\, a_0^{-\frac{2}{3}}$$

per cui:

$$T_{R=0} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\, a_0^{\frac{2}{3}} = \frac{4\pi\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\mu\delta}. \tag{16}$$

Con 2 mezzi differenti si avrà:

$$\frac{T}{T'} = \frac{\sqrt[3]{\mu\delta}}{\sqrt[3]{\mu'\delta'}}$$

e supponendo trattarsi di ferro e rame, prendendo pel primo $\mu = 10^3$ e $\delta = 10^4$ e pel secondo $\mu = 1$ e $\delta = 1600$, si avrà

$$\frac{T_{Cu}}{T_{Fe}} = 0{,}0542\,. \tag{17}$$

Ossia, a parità di condizioni del circuito di scarica, e supponendo in questo piccolissima la resistenza *effettiva*, il tempo periodico aumenta quando si sostituisce nel solenoide ad un nucleo di rame uno di ferro.

Nell'esempio ora dato s'è supposta costante la permeabilità del ferro ed uguale a 10^3. Di fatto essa è variabile in funzione del campo e poichè il campo ha valori differenti sia col procedere del tempo che col mutar distanza dall'asse del nucleo, sarà $\mu = f(t\,, \varrho)$. Se ci mettiamo in condizioni tali che il campo massimo esterno non superi il valore pel quale la permeabilità assume il valore massimo (p. e. pel ferro dolce da 2 a 3 unità cgs) la permeabilità media $\mu_0 = \frac{1}{ST}\int_0^T dt \int_S \mu dS$ lungo tutta la sezione del nucleo, nei successivi periodi, si comprende che dovrà andare diminuendo ossia, in tali condizioni il tempo periodico dovrà andare diminuendo col procedere del tempo. Ma se il campo esterno, prodotto dalla 1ª mezza oscillazione, è molto elevato in modo da dare valori bassi per la permeabilità, potrebbe benissimo darsi che la permeabilità media, corrispondente ai primi periodi, andasse aumentando e quindi andasse pure aumentando il tempo periodico. In queste condizioni si devono esser trovati i sigg. Battelli e Magri [1] quando hanno visto sperimentalmente che il periodo delle oscillazioni elettriche smorzate, traverso un solenoide con anima di ferro, andava successivamente crescendo.

Nel caso che mancasse nel solenoide il nucleo conduttore, abbiamo visto che la equazione (6) si riduce alla (9) che, quando sia trascurabile la resistenza *effettiva*, dà per tempo periodico

$$T_0 = 2\pi \sqrt{L_1 C}\,.$$

Per nucleo conduttore massiccio occupante tutto il solenoide si ha:

$$L_2 = L_1 \mu\,.$$

Indicato con T_1 il corrispondente tempo periodico e supposta, nonostante la introduzione del nucleo, ancora trascurabile la resistenza *effettiva*, avremo:

$$T_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{4\mu^2 L_1^2 C^2}{mr^2}}$$

per cui

$$T_0 \gtrless T_1$$

(1) Rendiconti Lincei, XV, 2° sem. 1906, pag. 397.

secondo che

$$\mu\delta \lessgtr \frac{3\sqrt{3}\,\pi r^2}{8\sqrt{L_1 C}} \,. \tag{18}$$

Si può adunque, coll'introduzione del nucleo, aumentare o diminuire il periodo della scarica ma, a parità di condizioni del circuito, e con resistenza trascurabile, si vede che può darsi che col nucleo di rame si abbia diminuzione e con quello di ferro aumento, ma non viceversa, come già risultava anche dalla (17).

Chimica. — *Azione del cloroformio sull'α-metilindolo e su alcuni pirroli* (¹). Nota di G. Plancher e U. Ponti, presentata dal Socio R. Nasini.

Proseguendo le nostre ricerche (²) sull'azione del cloroformio sui corpi di natura pirrolica, eravamo venuti ad esaminare questa reazione sui metilpirroli, sul metilfenilpirrolo e sull'α-metilindolo. Ed in questo ultimo caso avevamo notato che la reazione non andava completamente nel senso indicato da Magnanini (³); ma si formava un'altro prodotto non basico probabilmente di natura aldeidica.

Nello stesso tempo A. Ellinger (⁴) proseguendo le sue interessanti e fruttuose ricerche sul triptofano, trovò che da questo, per ossidazione, si ha la β-indolaldeide; non solamente: ma riuscì ad avere questo stesso corpo direttamente dall'indolo per azione del cloroformio secondo la reazione di Reimer e Tiemann.

Il sullodato autore ha avuto la gentilezza di lasciarci proseguire questo lavoro, che a noi interessava anche per stabilire la relazione che corre fra queste aldeidi ed i prodotti intermedi di trasformazione dei corpi pirrolici in piridici a mezzo del cloroformio.

Questo studio non è molto avanzato ma crediamo utile riferire quanto abbiamo finora accertato a fine di mostrare che ci occupiamo dell'argomento.

(¹) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica Farmaceutica della R. Università di Palermo.

(²) Plancher, Gazz. chim. ital. *30*, II, 558; Plancher e Testoni, questi Rendiconti *10*, I, 304; Plancher e Carrasco, ibid *13*, I, 573; *13*, I, 632; *14*, I, 162; *14*, I, 704; A. Lieben's Festschrift, 23/6 1907.

(³) Magnanini, Gazz. chim. ital. *17*, 246.

(⁴) Ber. d. deutsch. chem. Ges. *39*, 2515.