

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 febbraio 1907.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Paragone fra gli angoli di due triangoli geodetici di eguali lati.* Nota del Corrispondente P. PIZZETTI.

A corollario della Nota precedente su questo argomento, do qui l'espressione del massimo valore della differenza fra due angoli corrispondenti di due triangoli geodetici aventi gli stessi lati.

1. Sopra una superficie S consideriamo una geodetica AB e chiamiamo σ la lunghezza dell'arco di essa, contato a partire dal punto fisso A fino al punto qualunque M , g la *lunghezza ridotta* dell'arco AM ; h la curvatura geodetica, nel punto M ; della circonferenza geodetica avente centro in A ; k la curvatura assoluta della superficie in M .

Per un'altra superficie S' , considerata analogamente una geodetica $A'B'$, e su di essa l'arco $A'M'$ di lunghezza σ , chiamiamo G, H, K , le cose analoghe a g, h, k per il punto M' . Dalle formole del n° 2 della precedente Nota abbiamo:

$$(1) \quad H - h = \frac{1}{gG} \int_0^\sigma gG (K - k) d\sigma.$$

2. Per dedurre da questa un limite superiore della differenza ($H - h$) occorre che ci procuriamo, innanzi tutto, dei limiti superiori ed inferiori delle quantità g, G . Questa ricerca è stata da me fatta, nelle Memorie dell'Acca-

(¹) *Intorno al grado di approssimazione ecc.* (Mem. Accad. Torino, s. II, t. LVII).

demia di Torino (1), pel caso soltanto delle superficie a curvatura positiva. Ma è facile estendere la ricerca al caso più generale di superficie a curvatura di segno qualsiasi purchè finita. Per questo osserviamo che la g , definita essendo dalle equazioni

$$(2) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} = -gk \quad , \quad (g)_{\sigma=0} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} = 1 \quad ,$$

deve soddisfare a ciascuna di queste tre relazioni

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} g = R \operatorname{sen} \frac{\sigma}{R} + R \int_0^\sigma g_x \left(\frac{1}{R^2} - k_x \right) \operatorname{sen} \frac{\sigma - x}{R} \cdot dx \quad , \\ g = \varrho \operatorname{sen} \operatorname{ip} \frac{\sigma}{\varrho} - \varrho \int_0^\sigma g_x \left(\frac{1}{\varrho^2} + k_x \right) \operatorname{sen} \operatorname{ip} \frac{\sigma - x}{R} \cdot dx \quad , \\ g = \sigma - \int_0^\sigma g_x k_x (\sigma - x) dx \quad , \end{array} \right.$$

dove R e ϱ sono le lunghezze di due segmenti reali *qualsiasi*, e g_x, k_x esprimono i risultati della sostituzione della lettera x alla σ nelle g e k . Nella Memoria già citata è indicato l'artificio assai semplice, col quale sono giunto alla prima delle formule (3). La seconda si ottiene con un artificio analogo; la terza non è che un caso particolare delle prime due ($R = \infty, \varrho = \infty$). Ma, senza risalire ai calcoli che hanno condotto a quelle espressioni, si può senza difficoltà verificare che le derivate $\frac{\partial g}{\partial \sigma}, \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2}$ dedotte da ciascuna delle (3) soddisfanno alle tre condizioni (2).

Ciò posto, se la superficie è a curvatura *positiva* non maggiore di k_1 , posto nelle (3) $R = \frac{1}{\sqrt{k_1}}$ si vede che sarà

$$(4) \quad \sigma > g > \frac{1}{\sqrt{k_1}} \operatorname{sen} (\sigma \sqrt{k_1})$$

quando si considerino, come faremo qui, archi di geodetica di lunghezza limitata nel modo detto nella Nota precedente $\left(\sigma < \frac{\pi}{2\sqrt{k_1}} \right)$. Possiamo anche scrivere la (4) così

$$\sigma > g > \sigma \cos (\sigma \sqrt{k_1}) \quad .$$

Pel caso di superficie a curvatura negativa non minore di k_2 , posto nelle (3) $\varrho = \frac{1}{\sqrt{-k_2}}$ abbiamo $\frac{1}{\varrho^2} + k_x \geq 0$, e quindi

$$(4') \quad \sigma < g < \frac{1}{\sqrt{-k_2}} \operatorname{sen ip} (\sigma \sqrt{-k_2}).$$

E poichè per x positivo

$$\operatorname{sen ip} x < x \cos \operatorname{ip} x,$$

possiamo alla (4') sostituire la

$$\sigma < g < \sigma \cos \operatorname{ip} (\sigma \sqrt{-k_2}).$$

Riuniamo, per comodità, questi due sistemi di disuguaglianze in un solo

$$(5) \quad \sigma \cdot \cos (\sigma \sqrt{k_1}) < g < \sigma \cos \operatorname{ip} (\sigma \sqrt{-k_2})$$

il quale *varrà qualunque sia il segno della curvatura della superficie*, purchè si convenga di sostituire a k_1 lo *zero*, nel caso di superficie a curvatura sempre negativa, e di porre invece *zero* in luogo di k_2 nel caso di superficie a curvatura sempre positiva. Negli altri casi, si intenderà che k_1 e k_2 siano i limiti superiore ed inferiore della curvatura assoluta.

Riprendiamo ora in esame le due superficie S, S' da principio considerate, e siano k_1 e k_2 limiti superiore ed inferiore della curvatura per entrambe le superficie. Deduciamo dalle (1) e (5)

$$|H - h| < \frac{1}{\sigma^2 \cdot \cos^2 (\sigma \sqrt{k_1})} \int_0^\sigma \sigma^2 \cdot \cos^2 \operatorname{ip} (\sigma \sqrt{-k_2}) \cdot (K - k) d\sigma.$$

Supponiamo che la differenza $K - k$ non superi in valore assoluto un certo limite ε (sarà $\varepsilon \leq k_1 - k_2$). La precedente disuguaglianza sussisterà se al posto di $K - k$ si pone ε e se il fattore $\cos^2 \operatorname{ip}$ viene tolto fuori dal segno integrale (giacchè il $\cos \operatorname{ip}$ cresce al crescere dell'argomento). Quindi

$$(6) \quad |H - h| < \frac{\varepsilon \sigma \cos^2 \operatorname{ip} (\sigma \sqrt{-k_2})}{3 \cos^2 (\sigma \sqrt{k_1})}.$$

Osserviamo che uno dei segni di disuguaglianza nella (4) (4') potrà mutarsi in segno d'eguaglianza quando la k si mantenga costante lungo la geodetica considerata. Nella (6) invece la disuguaglianza sussiste sempre, finchè $\varepsilon > 0$, il che qui supporremo.

La formola (6) dà pertanto, un limite superiore della differenza fra le curvatures geodetiche di due circonferenze geodetiche di equal raggio σ descritte sopra due differenti superficie S, S' ove k_1, k_2 sono limiti inferiore e superiore della curvatura assoluta per entrambe le superficie, ed ε è la massima differenza fra la curvatura assoluta in un punto qualunque della S e quella in un punto qualunque della S' . Quando entrambe le superficie siano a curvatura ovunque positiva, si porrà zero al posto di k_2 , e se invece sono entrambe a curvatura negativa dovrà porsi $k_1 = 0$.

Possiamo anche dire che la (6) esprime un limite superiore della variazione cui va soggetta la curvatura geodetica di una circonferenza geodetica sopra una superficie, ove si supponga che nell'interno della circonferenza stessa la curvatura assoluta presenti la oscillazione massima ε , e siano k_1, k_2 limiti superiore ed inferiore della curvatura stessa, (colla suddetta convenzione riguardo al caso delle superficie a curvatura sempre negativa, o sempre positiva).

3. Si consideri ora sulla superficie S il triangolo geodetico ABC del quale i lati a, b, c riterremo compresi entro il limite di lunghezza fissato al n° 2 della precedente Nota. Per un punto M della S chiamiamo u, v le distanze geodetiche dai vertici A e B , h_u, h_v le curvatures geodetiche, in M , delle circonferenze aventi centro in A e B rispettivamente. Consideriamo poi sulla superficie S' il triangolo geodetico $A'B'C'$ avente gli stessi lati a, b, c , e chiamiamo θ, Θ gli angoli in A, A' nei due triangoli. Per la formola (9) della Nota precedente avremo

$$(7) \quad \log . \operatorname{sen} \frac{\Theta}{2} - \log . \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4} \int_c^{a+b} (H_u + H_v - h_u - h_v) d\alpha$$

dove H_u, H_v indicano sulla 2ª superficie gli elementi analoghi agli h_u, h_v della 1ª, e dove si intende posto

$$u = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad , \quad v = \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

e tenuto β costante durante la integrazione. Chiamando m il più grande dei due lati b e c , sarà m un limite superiore dei valori che u e v assumono nella formola (7). Quindi, per la (6) posto

$$M = \frac{\cos^2 \operatorname{ip} (m \sqrt{-k_2})}{\cos^2 (m \sqrt{k_1})},$$

potremo scrivere

$$|H_u - h_u| < \frac{\varepsilon M}{3} u \quad , \quad |H_v - h_v| < \frac{\varepsilon M}{3} v;$$

epperò

$$\left| \log \operatorname{sen} \frac{\Theta}{2} - \log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right| < \frac{\epsilon M}{12} \int_c^{a+b} \alpha \cdot d\alpha = \frac{\epsilon M}{24} [(a+b)^2 - c^2].$$

Chiamando θ_m un angolo compreso fra θ e Θ sarà

$$\Theta - \theta = 2 \left(\log \operatorname{sen} \frac{\Theta}{2} - \log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \operatorname{tang} \frac{\theta_m}{2}.$$

Ora se sulla sfera di raggio $1:\sqrt{k_1}$ consideriamo un triangolo di lati a, b, c , e ne chiamiamo θ_1 l'angolo in A, per il teorema dimostrato nella precedente Nota, sarà θ_1 un limite superiore dei valori di θ, Θ epperò anche di θ_m ; quindi

$$(8) \quad |\Theta - \theta| < \frac{\epsilon M}{12} [(a+b)^2 - c^2] \operatorname{tang} \frac{\theta_1}{2}.$$

Si ha d'altra parte

$$(9) \quad \operatorname{tang} \frac{\theta_1}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1/\sqrt{k_1}}{2} (a-b+c) \operatorname{sen} \frac{1/\sqrt{k_1}}{2} (b-a+c)}{\operatorname{sen} \frac{1/\sqrt{k_1}}{2} (a+b+c) \operatorname{sen} \frac{1/\sqrt{k_1}}{2} (a+b-c)}}.$$

Chiamando S l'area del triangolo piano i cui lati sono a, b, c , e ricordando che

$$4S = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$\operatorname{sen} \frac{1/\sqrt{k_1}}{2} (a-b+c) \operatorname{sen} \frac{1/\sqrt{k_1}}{2} (b-a+c) < \frac{k_1}{4} (a-b+c)(b-c+c)$$

le (8) (9) danno

$$|\Theta - \theta| < \frac{\epsilon MS}{3} \sqrt{\frac{k_1(a+b+c)(a+b-c)}{4 \operatorname{sen} \frac{1/\sqrt{k_1}}{2} (a+b+c) \operatorname{sen} \frac{1/\sqrt{k_1}}{2} (a+b-c)}}.$$

Ora si ha

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6}, \quad \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y}{xy} > 1 - \frac{x^2 y^2}{6};$$

quindi

$$(10) \quad |\Theta - \theta| < \frac{\epsilon S}{3} \frac{\cos^2 \operatorname{ip} \cdot (m\sqrt{-k_2})}{\cos^2 (m\sqrt{k_1}) \sqrt{1 - \frac{(a+b)^2 + c^2}{12} k_1}}.$$

Concludiamo pertanto che: se si considerano due triangoli geodetici aventi gli stessi lati, e se nelle regioni coperte dai due triangoli le curvature assolute delle superficie sono comprese fra un limite superiore k_1 , e un inferiore k_2 , e se fra la curvatura assoluta in un punto qualunque dell'una regione e quella in un punto qualunque dell'altra la differenza massima è $\leq \varepsilon$, la differenza fra due angoli corrispondenti è sempre minore del limite indicato dalla formola (6). In queste formole, lo ricordiamo, m è il massimo dei tre lati a, b, c , e si deve in particolare porre $k_2 = 0$ quando nelle due regioni considerate, la curvatura assoluta non sia mai minore di zero; e $k_1 = 0$ quando invece la curvatura stessa non sia mai maggiore di zero.

4. Applichiamo la formola (10) al paragone di un triangolo geodetico descritto sopra un ellissoide di rotazione schiacciato, e un triangolo sferico di eguali lati.

Poniamo che il triangolo geodetico sia compreso nella zona fra le latitudini $\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi}{2}$ e $\varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{2}$, e che la sfera abbia curvatura uguale a quella dell'ellissoide lungo il parallelo φ_0 . Potremo porre

$$k_1 = \frac{1}{\alpha^2(1-e^2)}, \quad k_2 = 0.$$

La prima di queste espressioni è infatti limite superiore della curvatura in un punto qualsiasi dell'ellissoide, ove si indichi con α il raggio dell'equatore, con e l'eccentricità. E poichè la derivata della curvatura rispetto alla latitudine è

$$\frac{dk}{k\varphi} = -\frac{2e^2}{\alpha^2(1-e^2)} \operatorname{sen} 2\varphi (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi),$$

potremo porre

$$\varepsilon = \frac{e^2}{\alpha^2(1-e^2)} \Delta\varphi.$$

La (10) diventa così

$$(11) \quad |\Theta - \theta| < \frac{e^2 S}{3\alpha^2(1-e^2)} \frac{\Delta\varphi}{\cos^2\left(\frac{m}{\alpha\sqrt{1-e^2}}\right) \sqrt{1 - \frac{(a+b)^2 + c^2}{\alpha^2(1-e^2)}}}$$

È questo un limite superiore dell'errore che si commette nel calcolo degli angoli del dato triangolo geodetico, quando, per approssimazione, lo si calcoli come triangolo sferico descritto sulla così detta sfera osculatrice lungo il parallelo φ_0 .

Pel caso dell'ellissoide terrestre, colle costanti di Bessel

$$\text{Log. dec. } \frac{e^2}{a^2(1-e^2)} = 4,2180318 - 20$$

$$\text{Log. dec. } k_1 = 6,3936214 - 20.$$

Per un triangolo i cui lati non superino 180 km., e le cui latitudini estreme non differiscano più di $1^{\circ}.20'$ fra loro ($A\varphi = 4800''$) la (11) dà

$$|\Theta - \theta| < 0'',0037.$$

Fisica. — *La scintilla elettrica nel campo magnetico.* Nota preliminare del Corrispondente A. BATTELLI e di L. MAGRI.

1. Dallo studio che abbiamo intrapreso da alcun tempo sulla costituzione della scintilla, crediamo utile di stralciare subito, per prenderne data, quei risultati che sono di più diretta osservazione e tuttavia mal conosciuti.

Un esame accurato dei fenomeni luminosi della scintilla porta a concludere che essi possono dividersi con esattezza nelle parti seguenti:

1° Un tratto luminoso, molte volte di splendore diverso nelle sue varie porzioni, che va dall'uno all'altro elettrodo.

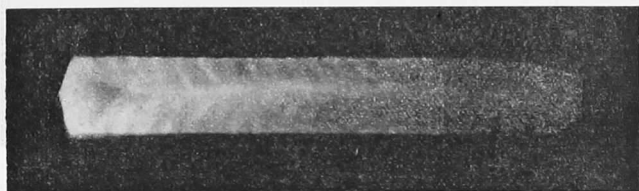


FIG. 1.

2° Delle masse di vapore luminose che vengono staccate dagli elettrodi e lanciate via con velocità diverse. La copia maggiore di vapori viene emessa dall'elettrodo negativo in una fase determinata dell'oscillazione.

3° Un'aureola luminosa, talora molto estesa, che circonda la scintilla.

4° I punti alla superficie degli elettrodi sui quali si imposta la scintilla (o le successive scintilline elementari nel caso di scariche oscillatorie) che sono resi fortemente luminosi dalla corrente elettrica.

2. Nel caso di scariche oscillatorie (che è quello di cui ci siamo più particolarmente occupati) questi quattro fenomeni variano notevolmente col variare delle condizioni della scarica.

La fig. 1 ci rappresenta una scarica di breve periodo (circa 2×10^{-6}) analizzata con lo specchio rotante; al principiare di essa vedonsi benissimo