ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Il problema di Dirichlet considerato come limite di un ordinario problema di minimo*. Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Io voglio qui dimostrare che il problema di Dirichlet (che già si sa [1] potersi affrontare come problema di variazione) si può, almeno sotto certe condizioni, considerare anche [2] come limite di un ordinario problema di minimo. Sia c un contorno convesso (e senza flessi) nel piano xy; e, per evitare discussioni minute, supponiamo che c abbia tangente e curvatura variabili con continuità. Sia Γ l'area racchiusa da c; e siano x, y coordinate cartesiane ortogonali. Per poter ricorrere all'intuizione geometrica, indicherò con z una terza coordinata, che con le prime formi un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nello spazio. Una funzione z delle x, y, data nel campo Γ, rappresenta una superficie V nello spazio, che si proietta biunivocamente nell'area Γ del piano xy. Il dare i valori della z su c equivale a dare il contorno C di V: contorno, che si proietta sul piano xy nel contorno c. Supposto che i valori prescritti su c formino una funzione finita e continua, insieme alle sue derivate prime e seconde, dell'arco s di c, mi propongo di costruire in Γ una funzione armonica, che su c assume i valori prefissi (*problema di Dirichlet*). Indicherò con K una costante positiva, maggiore in valore assoluto della citata derivata prima. Le condizioni imposte ai valori dati su c non costituiscono una restrizione essenziale: infatti esse si possono togliere per mezzo del teorema di Harnack sulle serie uniformemente convergenti di funzioni armoniche col metodo stesso seguito da Paraf e Picard a proposito del metodo del *balayage* [3]. Un piano normale al piano xy potrà incontrare C al massimo in due punti [4], e non potrà essere *piano limite* di infiniti piani, che abbiano tre punti comuni con C.

Se ora, dato un qualsiasi angolo $\alpha < \frac{\pi}{2}$, si potesse trovare un piano, passante per tre punti di C, e facente col piano xy un angolo maggiore

[1] Cfr. Hilbert, Math. Ann. (tomo 59); Levi, Rend. del Circ. Matem. di Palermo, tomo 22; Fubini, *Sul principio di Dirichlet* (id. id.) e *Il principio di minimo* ecc. (id. id., tomo 23).

[2] Il Lebesgue usò un metodo simile per il problema di Plateau, senza però completare la trattazione (Ann. di Matem. 1902, pag. 348 e seg.).

[3] Cfr. il *Traité d'Analyse* del Picard, tomo II (1903), pag. 100 e seg.

[4] Poichè c è convesso, e senza flessi, un piano normale al piano xy non può neanche essere osculatore a C, oppure essere tangente in un punto a C, e contenere altri punti di C.

di α, allora se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ sono angoli minori di $\frac{\pi}{2}$ tali che $\lim_{n=\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}$, noi potremmo trovare infiniti piani, passanti per tre punti di C, e formanti col piano xy degli angoli $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ tali che $\lim_{n=\infty} \beta_n = \frac{\pi}{2}$. Essi avrebbero almeno un *piano limite* π, che sarebbe normale al piano xy: ciò che abbiamo dimostrato assurdo. Dunque: *Esiste un angolo* $\alpha < \frac{\pi}{2}$, *tale che i piani passanti per tre punti di* C *formano col piano* xy *un angolo minore di* α. (Si noti che $k \leq \tang \alpha$).

2. Una retta, che passi per due punti di C, giace in piani contenenti almeno tre punti di C, e forma quindi col piano xy un angolo minore di α. Siano A, B due punti di C, e siano a, b le loro proiezioni su c; la retta ab divide Γ in due pezzi Γ_1, Γ_2. Sia d un punto di c, posto p. es. sul contorno di Γ_1, e sia D il punto corrispondente di C. Se noi imponiamo a una funzione $u(x, y)$, esistente in Γ_1, di assumere sul segmento ab e sul tratto adb di c valori tali che la superficie $z = u$ passi per il segmento AB e per l'arco ADB di C, noi verremo ad imporre i valori che u ha sul contorno di Γ_1; e questi valori avranno rispetto all'arco s_1 di tale contorno derivate prime inferiori in valore assoluto alla costante H (se H è una costante maggiore di K e di tang α). *L'esistenza di funzioni* u *soddisfacenti a tali condizioni, e tali che in tutto* Γ_1 *abbiano derivate prime inferiori in modulo a* H, è cosa evidente. Essa si può del resto dimostrare con ogni rigore, ricordando p. es. che Γ_1 è convesso (¹). Con ragionamenti analoghi, applicati all'area Γ, si potrebbe dimostrare *l'esistenza in* Γ *di funzioni, aventi i valori prescritti su* c, *e possedenti entro* Γ *derivate prime limitate.*

3. Noi ci restringeremo in tutte queste pagine alla considerazione delle funzioni $u(x, y)$, che

1°) sono finite e continue nell'area γ, ove sono definite;

2°) posseggono derivate prime limitate, e generalmente continue. Voglio dire che queste derivate sono continue in γ, quando si escluda al più un numero finito N di linee analitiche (rette, cerchî, ecc.), in cui queste derivate possono avere discontinuità di prima specie. Il numero N, al variare delle funzioni u considerate, può anche assumere valori grandi a piacere.

(¹) Cfr. p. es. la Mem. citata del Levi, o quella del Fubini (§ 3). Si potrebbe p. es. considerare la funzione u, tale che l'equazione $z = u$ rappresenti il cono proiettante da A l'arco ADB di C (una tangente a tale cono giace in un piano, che forma col piano xy un angolo minore di α).

Diremo poi *pseudoarea* della superficie $z = u(x, y)$ l'integrale superficiale esteso all'area γ di $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

In particolare la *pseudoarea* di una superficie piana è uguale al prodotto dell'area della sua proiezione sul piano xy moltiplicata per il quadrato della tangente dell'angolo, che il suo piano fa col piano xy (1).

La pseudoarea di una superficie poliedrica è uguale alla somma delle pseudoaree delle sue faccie.

Se una funzione $u(x, y)$ gode delle proprietà precedenti, è definita nell'area Γ, e se la superficie $z = u(x, y)$ passa per C, noi diremo che detta funzione (detta superficie) appartiene all'insieme (u). È noto che il problema di Dirichlet si può enunciare così:

Dimostrare che fra le superficie (u) *esiste una superficie* $z = v(x, y)$, *che ha la pseudoarea minima, e che la funzione* v *è armonica in* Γ (*e quindi risolve il problema di Dirichlet enunciato al n. 1*).

4. Se d è il *limite inferiore* delle pseudoaree delle superficie di (u) (che noi dovremo dimostrare essere un *minimo*), noi potremo trovare una successione (*minimizzante*) di superficie $S_1, S_2, S_3, \ldots$ appartenenti all'insieme (u), tali che le loro pseudoaree $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ soddisfino alle

$$\sigma_n \geq d (n = 1, 2, \ldots), \lim_{n=\infty} \sigma_n = d.$$

Con $z = u_i$ indicherò l'equazione della superficie S_i (2). Noi vogliamo ora cercare una speciale successione minimizzante. Per le ipotesi fatte sulle superficie (u), potremo costruire una superficie poliedrale S'_i inscritta in S_i, e terminata a un poligono C_i inscritto in C, in guisa tale che la differenza delle pseudoaree di S_i e S'_i sia minore di una costante ε_i prefissa a priori, e che $\lim_{i=\infty} C_i = C$ (3).

(1) La pseudoarea di un'area piana posta in un piano parallelo (normale) al piano xy è quindi nulla (infinita).

(2) Lo studio generale delle successioni minimizzanti è stato fatto nella mia Mem. citata (tomo 43, Rend. del Circ. Mat. di Palermo).

(3) Se p. es. le derivate prime delle u_i sono continue (e quindi uniformemente continue) in Γ, si sceglierà un poligono c_i inscritto in c, in guisa che quella porzione di S_i, che si proietta in quella parte di Γ, che è compresa tra c e c_i, abbia una pseudoarea minore di $\frac{\varepsilon_i}{2}$. Si divida poi l'area Γ_i interna a c_i p. es. con tanti triangoli rettangoli δ_i, così piccoli che in ciascuno di essi il quadrato della derivata prima di u_i secondo una *qualsiasi* direzione (e in particolare quindi anche secondo la direzione dei cateti) faccia una oscillazione minore di $\frac{\varepsilon_i}{4L}$ (dove con L indico l'area di Γ). Prendo poi come superficie S'_i la superficie poliedrica, inscritta in S_i, le cui faccie si proiettano nei triangoli δ_i.

Se invece la funzione u_i ha derivate, che hanno discontinuità di prima specie lungo N

Indichiamo con c_i la proiezione di C_i sul piano xy, con Γ_i l'area racchiusa da c_i, con $z = t_{i1}(x, y)$ l'equazione di S'_i. La funzione t_{i1} esiste ed è continua nell'area Γ_i. L'area $\Gamma - \Gamma_i$ racchiusa tra c e c_i è somma di n_i aree parziali (se n_i è il numero dei vertici di c_i), ciascuna delle quali è racchiusa tra un lato di c_i e un archetto di c. Per i risultati del n. 2 noi potremo costruire in ciascuna di queste n_i aree, e quindi anche nell'area totale $\Gamma - \Gamma_i$ una funzione $z = t_{i2}(x, y)$ avente entro $\Gamma - \Gamma_i$ derivate prime continue, e inferiori in modulo alla costante H, e assumente su c i valori prescritti, e sui lati di c_i gli stessi valori, che sono ivi assunti dalla funzione t_{i1}. La funzione $z = t_i(x, y)$, che entro Γ_i è uguale a t_{i1}, e in $\Gamma - \Gamma_i$ è uguale a t_{i2}, è una funzione (u).

Poichè chiaramente $\lim\limits_{i=\infty} c_i = c$, e le derivate prime di t_{i2} sono in modulo inferiori ad H, la pseudoarea ϱ_i della superficie $z = t_{i2}$ tende a zero per $i = \infty$. Se con σ'_i indico la pseudoarea di S'_i, si ha: $|\sigma_i - \sigma'_i| < \varepsilon_i$: la pseudoarea τ_i della superficie $z = t_i$ è uguale a $\sigma'_i + \varrho_i \leq \sigma_i + \varepsilon_i + \varrho_i$. Per la definizione stessa di d, si ha $\sigma'_i + \varrho_i \geq d$; poichè $\lim\limits_{i=\infty} \varepsilon_i = \lim\limits_{i=\infty} \varrho_i = 0$, $\lim\limits_{i=\infty} \sigma_i = d$, si avrà: $\lim\limits_{i=\infty} \tau_i = d$. Quindi la successione delle funzioni $z = t_i(x, y)$ è pure una *successione minimizzante*. Consideriamo ora la funzione $z = w_i(x, y)$, che in $\Gamma - \Gamma_i$ è uguale a $t_i(x, y) = t_{i2}$, e che entro Γ_i rappresenta la superficie poliedrica S''_i che ora definiremo. Tra tutte le superficie $\sum$, terminate a C_i, proiettate biunivocamente nella regione Γ_i del piano xy, *i cui vertici sono in corrispondenza biunivoca coi vertici di* S'_i, *e hanno con questi a comune le proiezioni sul piano* xy, indico con S''_i la (una) superficie poliedrica, *che ha la pseudoarea minima possibile*. L'esistenza di una tal superficie è ben evidente. Se infatti $z_1, z_2, \ldots, z_s$ sono le terze coordinate dei vertici di $\sum$ esterni a C (se s è il numero dei vertici di S'_i esterni a C), la pseudoarea di $\sum$ è funzione continua delle $z_1, z_2, \ldots, z_s$. E, poichè essa è sempre positiva (e anzi non è mai infinitesima) raggiungerà il valore minimo per qualche valore delle $z_1, z_2, \ldots, z_s$ (¹). Esiste dunque *almeno una* superficie S''_i (coi vertici a distanza finita).

---

linee analitiche, si osservi che queste linee divideranno Γ in un numero finito M di parti. Per ciascuna di queste M porzioni potremo ripetere un ragionamento analogo al precedente: otterremo così M superficie poliedriche, che costruiremo con la ulteriore avvertenza che esse formino, considerate insieme, una unica superficie poliedrica (connessa). Faremo in modo cioè che, se Γ', Γ'' sono due degli M pezzi di Γ, tra loro contigui, le superficie poliedriche corrispondenti abbiano comuni i vertici posti sulla linea di separazione dei due pezzi considerati.

Il teorema risulta ancora più evidente, quando si pensi al teorema analogo sulle *aree*.

(¹) Nè può uno di questi valori essere infinito; in tal caso la corrispondente superficie Σ avrebbe almeno una faccia normale al piano xy, e quindi avrebbe una pseudoarea infinitamente grande.

La superficie $z = w_i(x, y)$ ha una pseudoarea $\lambda_i \leq \tau_i$. E, poichè $\lambda_i \geq d$, $\lim_{i=\infty} \tau_i = d$, sarà $\lim_{i=\infty} \lambda_i = d$. Anche la successione $z = w_i(x, y)$ è una successione minimizzante [1].

5. Noi osserveremo che *i rapporti incrementali della funzione* $z = w_i(x, y)$ *sono tutti inferiori ad* H *in valore assoluto*. Ciò è ben evidente per quanto riguarda i punti di $\Gamma - \Gamma_i$. Per quanto riguarda la regione Γ_i, ciò si dimostra in modo analogo a quanto fa Lebesgue (loc. cit.) [2], appena sia dimostrato il seguente teorema, che provvisoriamente ammetteremo:

Nessun angoloide della superficie S_i'' *può essere tagliato da un piano lungo una linea chiusa.*

L'essere le derivate delle w_i inferiori a una stessa costante H porta subito a una conseguenza notevole, quando si applichino i teoremi del professore Arzelà [3], oppure si usi lo stesso artificio, usato da Hilbert (loc. cit.). *Nella successione delle funzioni* $w_i(x, y)$ *si può scegliere una successione subordinata* $w_{i_1}, w_{i_2}, w_{i_3}, \ldots$, *la quale tenda uniformemente a una funzione* $v(x, y)$ *esistente in* Γ, *la quale assumerà sul contorno di c i valori prefissati.*

La semplice applicazione dei risultati della mia Nota citata: *Sul principio di Dirichlet* (tomo 22 dei Rend. del Circ. Matem. di Palermo) [4] *dimostra che* $v(x, y)$ *è armonica in* Γ, e che quindi essa è la funzione cercata. *Il teorema di esistenza per il problema di Dirichlet è quindi dimostrato.*

6. Ritorniamo ora sul teorema, ammesso al n. 5. Per la definizione stessa di S'' un angoloide $A(B_1 B_2 \ldots B_s)$ di S'' è un angoloide che proietta da un vertice A di S'' un poligono (in generale sghembo) $B_1 B_2 \ldots B_s$, i cui vertici sono vertici di S'', e che ha una pseudoarea minima, confrontato con tutti gli angoloidi, che proiettano il poligono $B_1 B_2 \ldots B_s$ da un punto A' posto sulla normale al piano xy passante per A. Di più punti distinti dell'angoloide $A(B_1 \ldots B_s)$ hanno proiezioni distinte sul piano xy. È ben evidente che *un piano* $z =$ cost *non può tagliare detto angoloide in una linea chiusa.* Chè, se A' è la proiezione di A su detto piano, la pseudoarea [5] dell'angoloide

(1) È ben evidente che le funzioni $w_i(x, y)$ appartengono a (u).

(2) Il prof. Vitali mi fa osservare che a pag. 350 (riga 4) del citato lavoro del Lebesgue si deve probabilmente leggere *convexe* anzichè *aigu*.

(3) Cfr. Vitali, *Sopra le serie* ecc. (Ann. di Matem., 1903) § 3.

(4) Si potrebbero anche applicare gli altri metodi usati nella mia Mem. cit. (*Il principio di minimo* ecc.).

(5) Infatti i triangoli $AB_i B_{i+1}$, $A'B_i B_{i+1}$ hanno la stessa proiezione sul piano xy; il piano del secondo forma però col piano xy un angolo minore dell'angolo formato dal piano $AB_i B_{i+1}$; e quindi la pseudoarea di ogni triangolo $A'B_i B_{i+1}$ sarebbe minore della pseudoarea del triangolo $AB_i B_{i+1}$ corrispondente (per brevità ho posto $B_{s+1} = B_1$).

$A'(B_1 \ldots B_s)$ sarebbe minore della pseudoarea dell'angoloide $A(B_1 \ldots B_s)$, ciò che è impossibile. Se poi un piano qualunque α tagliasse detto angoloide secondo una linea chiusa, il piano passante per A parallelo ad α, lascierebbe i punti $B_1 \ldots B_s$ tutti da una stessa parte. Che ciò sia assurdo, è dimostrato nel modo più semplice ed elegante dal dott. Medici nella sua Nota: *Su una questione di minimo, che si riconnette al problema di Dirichlet* [1].

Fisica. — *L'isteresi magnetica del ferro per correnti di alta frequenza.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Corrispondente D. Macaluso.

1. In una recente Nota i professori Battelli e Magri [2] hanno riferito l'esito delle esperienze da loro intraprese su questo argomento, cosistenti nel fotografare le curve d'isteresi del ferro, ottenute col tubo di Braun, per correnti alternate di 50 e 10000 alternazioni a secondo.

La disposizione è all'incirca quella adottata nelle mie esperienze del 1903 sullo stesso argomento [3]; soltanto le correnti son fornite da un alternatore, mentre io feci uso delle correnti del Duddel rese sinusoidali; inoltre le fotografie da me pubblicate riproducevano le curve di isteresi di un unico fascetto di fili di ferro dolce del più piccolo diametro che mi fu possibile procurarmi (mm. 0,25) e per sei numeri diversi di alternazioni, crescenti da 1500 a 20000 circa, oltre al ciclo corrispondente a 4 alternazioni; mentre le fotografie dei sigg. Battelli e Magri si riferiscono ai due soli numeri di alternazioni 50 e 10000, e a tre fasci di fili di ferro di diversa durezza e diametro (mm. 0,05; mm. 0,1; mm. 0,3).

Gli autori confermano il risultato da me ottenuto, che cioè la permeabilità è indipendente dalla frequenza; ma deducono dalle curve avute che l'area d'isteresi non cresce con la frequenza, contrariamente a quanto apparisce dalle mie fotografie.

L'aumento visibile nelle mie curve, e in quella n. 6 dei sigg. Battelli e Magri relativa al filo di mm. 0,3, viene da loro attribuito alla non completa eliminazione degli effetti dovuti alle correnti di Foucault, poichè tale aumento non si ha più nelle curve relative ai fili più sottili.

2. Questa conclusione, a prima vista evidente, non è accettabile qualora si esamini attentamente fino a che punto può intervenire l'azione delle

[1] Nota presentata nella seduta del 20 gennaio 1907.

[2] Battelli e Magri, Rend. Lincei, vol. XV. 2° sem., fasc. 8°, pag. 485, 1906.

[3] Corbino, Atti A. E. I., vol. VII, pag. 606, 1903; Physik. Zeitscr., VI Jahrgang, pag. 174, 1905.