ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 febbraio 1907.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Nuovo processo di disinfezione delle acque potabili.* Memoria II del Socio E. Paternò e di M. Cingolani.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Di alcuni nuovi problemi, ai quali è applicabile il principio di Dirichlet.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio L. Bianchi.

In questa Nota io riassumo in modo breve alcune mie ricerche sul principio di minimo, che hanno lo scopo di dimostrarne l'applicabilità a nuove classi di problemi. Un più ampio svolgimento di tali ricerche sarà dato altrove. Io svolgerò soltanto un caso particolare, accennando in fine a quali altri problemi il metodo attuale di dimostrazione si può applicare.

Il problema di costruire una funzione armonica U in un campo Γ (che supporremo p. es. a tre dimensioni), sul contorno c del quale sono prefissati i valori della derivata normale di U, è stato da Lord Kelvin [1] trasformato nel seguente problema di minimo. Indichiamo con x, y, z coordinate cartesiane ortogonali, con $d\tau$ e $d\sigma$ gli elementi di volume e di area di Γ e di c, con $\Delta_1 u$ il parametro $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$, e con J$(u)$ l'integrale $\int_\Gamma \Delta_1 u\, d\tau$ [2]. Il *problema di Lord Kelvin* si enuncia così:

[1] Cfr. p. es. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes* ecc. (Paris, Hermann, 1903), page 6, § 6.

[2] In tutto quanto segue darò alle parole: *misura* e *integrale* il significato dato loro dal Lebesgue nelle sue *Leçons sur l'intégration*.

Sia f una funzione prefissata dei punti di c. Dimostrare l'esistenza in Γ di una funzione (armonica) $U(x, y, z)$ tale che sia

$$\int_c f U d\sigma = 1 \tag{1}$$

e che $J(U)$ non sia maggiore di $J(v)$, quando v è una qualsiasi funzione esistente in Γ, per cui è soddisfatta la

$$\int f v d\sigma = 1. \tag*{(1)^{bis}}$$

La funzione f è proporzionale ai valori prescritti per la derivata normale della funzione cercata, cosicchè si deve supporre

$$\int_c f d\sigma = 0. \tag{2}$$

Vedremo del resto più precisamente più avanti il significato della (2) per il problema di Lord Kelvin. Ma anzitutto faremo due osservazioni:

1ª. Il problema di Lord Kelvin è più generale del problema di costruire una funzione armonica in Γ, che su c abbia una derivata normale prefissa. Basti p. es. osservare che il problema di Lord Kelvin non richiede neanche che c abbia normale in ogni punto, purchè si *possa parlare di integrali estesi al campo Γ, o al contorno c, e purchè f sia integrabile su c*.

2ª. Il problema di Lord Kelvin, così come noi lo abbiamo enunciato, *non ammette in generale soluzione*. Noi non possiamo cioè accontentarci di imporre alle funzioni v la condizione $(1)^{bis}$, e l'altra (che è implicitamente inclusa nel precedente enunciato) che le funzioni v ammettano un parametro $\Delta_1 v$ integrabile in Γ [1]. Noi dovremo imporre condizioni più restrittive, che enuncieremo così:

α) Le funzioni v sono finite e continue in ogni punto interno a Γ, e sono funzioni assolutamente continue [2] su ogni retta coordinata [3] (inclusi i punti in cui questa retta incontra c), escluso al più un aggregato di misura nulla di queste rette.

β) I valori assunti su c soddisfano alla $\int_c f v d\sigma = 1$.

[1] Beppo Levi, *Sul principio di Dirichlet*, Rend. del Circ. Matem. di Palermo tomo 22, nn. 5-8.

[2] Vitali, *Sulle funzioni integrali*, Atti dell'Accad. di Torino, 1905.

[3] Con le parole: *retta coordinata* e *piano coordinato* indico rispettivamente le rette e i piani paralleli agli assi e ai piani coordinati.

γ) Le derivate prime di una funzione v, e i loro quadrati sono integrabili in Γ.

L'insieme delle funzioni, che hanno le proprietà (α), (β), (γ), si dirà insieme (u) [1]. E con d indicherò il limite inferiore dei valori, che può assumere $J(v)$, quando la funzione v appartiene all'insieme (u). Il problema di Lord Kelvin si enuncia allora rigorosamente così:

Dimostrare che d è un minimo, ossia dimostrare che in (u) esiste una funzione (armonica) U, *tale che* $J(U) = d$.

Per la definizione stessa di d noi potremo trovare in (u) infinite funzioni $v_1, v_2, v_3, \ldots$, tali che $\lim\limits_{n=\infty} J(v_n) = d$, ossia che, posto $J(v_n) = d + \frac{\varepsilon_n}{6}$, sia $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Ed è anzi possibile (e in infinite maniere) scegliere una tale successione di funzioni (che chiameremo una successione minimizzante) in guisa che: $\varepsilon_{i-1} > \varepsilon_i$, $\varepsilon_1 < 1$ e che la serie $\sum\limits_i \varepsilon_i^{\frac{1}{3}}$ sia convergente. Convergerà allora anche ogni serie $\sum\limits_i \varepsilon_i^k$ ($k =$ cost), se $k \geq \frac{1}{3}$.

Noi diremo che una retta coordinata (p. es. una retta parallela all'asse delle x) è una retta *regolare*, se le v_i sono assolutamente continue su tale retta, e se si può trovare un intero i_0 tale che per $i \geq i_0$ sia

$$\int \left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| dx < \sqrt{l}\, \varepsilon_i^{\frac{1}{3}} \qquad (M_i = v_i - v_{i-1})$$

quando l'integrazione sia estesa a un qualsiasi segmento (la cui lunghezza indico con l) appartenente alla retta in discorso, e interno al campo Γ. Le rette *non regolari* si diranno rette *eccezionali*.

Un piano coordinato (p. es. un piano $x =$ cost) si dirà *regolare*, se le rette coordinate (le rette parallele all'asse delle y o a quello delle z) poste su di esso formano un aggregato di misura lineare nulla. Se invece o le rette parallele all'asse delle y, o quelle parallele all'asse delle z, che giacciono sul piano in discorso formano un aggregato di misura (lineare) non nulla, allora il piano si dirà *eccezionale*.

Si dimostra:

1°) *Le rette coordinate eccezionali formano un aggregato di misura superficiale nulla; i piani coordinati eccezionali formano un aggregato di misura lineare nulla* [2].

2°) *Se esiste ed è finito il* $\lim\limits_{n=\infty} v_n$ *in un punto* A *di una retta* r *coordinata regolare, detto limite esiste ed è finito in tutti i punti di un*

[1] L'esistenza di tali funzioni si può dimostrare in casi di amplissima generalità.

[2] Veramente si dovrebbe dire: « tre aggregati », uno per ciascuno degli assi o dei piani coordinati. La superiore locuzione è però forse più espressiva.

segmento interno a Γ, posto su r, contenente il punto A, e rappresenta su questo segmento una funzione continua.

3°) *Se esiste ed è finito il* $\lim_{n=\infty} v_n$ *in un punto A di un piano π regolare, tale che almeno una delle due rette coordinate uscenti da A, e giacenti in π, non sia eccezionale, allora esiste ed è finito il* $\lim_{n=\infty} v_n$ *in tutti i punti di π, escluso al più un aggregato G linearmente nullo* (¹) *di punti di π. E quindi* (per il teorema 2°) *il* $\lim_{n=\infty} v_n$ *esiste ed è finito in tutti i punti di un altro qualsiasi piano coordinato regolare, eccetto al più un aggregato linearmente nullo di punti, e in tutti i punti di un piano coordinato eccezionale, eccetto al più un aggregato di punti di misura superficiale nulla.*

Sorge dunque la domanda: *Come possiamo noi assicurarci della esistenza del* $\lim_{n=\infty} v_n$ *in un punto A di un piano π coordinato regolare, da cui esca una linea coordinata regolare posta in π?*

Cominciamo ad osservare che l'aggregato dei valori, che le funzioni v_i hanno nel punto A, avrà dei valori limiti; e se α è uno di questi valori limiti, noi potremo nella successione $v_1, v_2, v_3, \ldots$ staccare una successione subordinata $v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3}, \ldots$ tale che $\lim_{n=\infty} v_{k_n} = \alpha$. Il primo inconveniente, che si ha con questo metodo, è questo che l'aggregato dei valori delle v_n in A può avere per unico valore limite la quantità $\pm\infty$, cosicchè α non sarebbe una quantità finita. Di più noi saremmo costretti a studiare direttamente non la successione delle v_n, ma una successione subordinata. Per approfondire questa questione, dobbiamo distinguere due casi:

1°) La (2) è soddisfatta. In tal caso se v appartiene ad (u), anche $v + h$ $(h = \text{cost})$ appartiene a (u). Se $v_1, v_2, \ldots$ è una successione minimizzante, anche $u_1 = v_1 + h_1$, $u_2 = v_2 + h_2, \ldots$ $(h_1, h_2 \ldots = \text{cost})$ è una successione minimizzante, che ha con la precedente comuni rette e piani eccezionali. E di queste costanti $h_1, h_2, \ldots$ (che sono in nostro arbitrio) possiamo servirci in modo che esista e sia finito il $\lim_{n=\infty} u_n$ nel punto A, in guisa da rendere applicabili i precedenti teoremi.

2°) La (2) non è soddisfatta. Sia $\int_c f d\sigma = k \neq 0$, allora, se v è una funzione di (u), la funzione $u = \dfrac{kv + m - 1}{km}$ appartiene a (u) qualunque sia la costante $m \neq 0$. Si potrebbe poi, in modo analogo a quanto facemmo

(¹) Cioè, se p. es. π è un piano $x = \text{cost}$, in π vi è al massimo un aggregato di misura (lineare) nulla di rette $y = \text{cost}$, o di rette $z = \text{cost}$, che contengono punti di G. E i punti di G, che appartengono a una di queste rette, formano un aggregato di misura (lineare) nulla.

nel caso precedente, sostituire alla successione delle v_i la successione delle $u_i = \dfrac{kv_i + m_i - 1}{km_i}$, dove le costanti m_i fossero scelte in modo che la successione delle u_i sia una successione minimizzante (per il che basta che $|m_i| > 1$), e che esista in A il $\lim\limits_{n=\infty} u_n$. Resterebbe il dubbio però, che le rette eccezionali per la prima successione non fossero le stesse rette eccezionali per la seconda. Non vale però la pena di entrare in simili studî, perchè è ben facile riconoscere che in questo caso $d = 0$, e che la funzione U è la costante $\dfrac{1}{k}$ [1]. Noi dunque potremo limitarci a studiare il primo caso, il caso cioè che $k = 0$. In questo caso come dicemmo, *esiste una successione minimizzante* (delle $u_1, u_2, \ldots$) *che converge in tutti i punti di un piano coordinato regolare* (*eccezionale*), *eccetto che in un aggregato di punti linearmente nullo* (*di misura superficiale nulla*), *in guisa tale che* $u = \lim\limits_{n=\infty} u_n$ *rappresenta una funzione continua su ogni retta coordinata, inclusi i punti comuni a tale retta ed a c, escluso un aggregato di tali rette di misura superficiale nulla.*

Consideriamo ora un pezzo R di una superficie Σ, che sia in corrispondenza biunivoca con la sua proiezione ortogonale p. es. sul piano delle x. Il $\lim\limits_{n=\infty} u_n = u$ *esiste ed è finito in ogni punto di* R, *escluso al più un aggregato di misura superficiale nulla di punti di* R. Ora, come è noto, i valori di una funzione w in un tale aggregato non influiscono sul valore dell'integrale di w esteso a R. Sorge dunque la domanda se esiste il $\lim\limits_{n=\infty} \int_R u_n d\sigma'$ (dove con $d\sigma'$ indico l'elemento d'area di R) e se questo limite è uguale a $\int_R u d\sigma'$. A questa domanda si può rispondere affermativamente. Il metodo da usare è il seguente: di considerare prima i piani $x = \text{cost}$ regolari, i quali sono di più tali che si possa per ciascuno di essi trovare un intero i_0, in guisa che per $i > i_0$ sia

$$\iint \left[\left(\frac{\partial M_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_i}{\partial z} \right)^2 \right] dy\, dz < \varepsilon_i^{\frac{2}{3}}$$

quando l'integrazione sia estesa a quella regione del piano considerata, che è interna a Γ. Un piano $x = \text{cost}$ generico gode di queste proprietà, perchè si può dimostrare che al più esiste un aggregato di piani $x = \text{cost}$ di misura nulla, che non soddisfano a tali condizioni.

Dimostrata direttamente la proprietà enunciata per ogni regione R di un tale piano, la si può quindi estendere alle superficie Σ.

[1] Ciò si potrebbe del resto anche dedurre dallo studio delle successioni minimizzanti.

E con uno qualsiasi dei metodi da me già dati altrove [1], se ne può dedurre il teorema: *Esiste una funzione armonica* U, *la quale coincide con* u *in tutti i punti di* Γ, *eccetto al più in un aggregato* E. *Le rette coordinate, che contengono un punto di* E, *formano un aggregato di misura nulla.*

E, nello stesso tempo, si dimostra (ammettendo p. es. che la funzione f sia limitata e che c si possa dividere in un numero finito di pezzi, ciascuno dei quali è proiettato biunivocamente su almeno uno dei piani coordinati) che *la* U *soddisfa la* (1), e che $J(U) = d$. Ne resta così dimostrato il *teorema di esistenza*. E, se è soddisfatta la (2), è anche implicitamente dimostrato che $U \neq \text{cost}$ (se infatti fosse $U = \text{cost}$, la (1) sarebbe contraddittoria con la (2)).

Il metodo qui riassunto vale anche per equazioni differenziali lineari distinte dall'equazione delle funzioni armoniche, quando al contorno si prefissano condizioni analoghe alla (1) (o per sistemi di equazioni lineari. L'estensione si compie coi metodi ricordati ai §§ 9-10 della mia Mem. cit.

Matematica. — *Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration.* Nota di Henri Lebesgue, presentata dal Socio C. Segre.

Matematica. — *Sur les formes différentielles m-linéaires.* Nota di Th. De Donder (a Bruxelles), presentata dal Corrispondente E. Pascal.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Cristallografia. — *Studio cristallografico del seleniato di torio ottoidrato.* [2] Nota del dott. Aristide Rosati, presentata dal Socio G. Struever.

Il prof. C. Manuelli e il dott. M. Cingolani [3] sciogliendo a caldo il seleniato di torio noveidrato nella soluzione di seleniato di sodio ebbero per raffreddamento il $Th(SeO_4)_2 . 8H_2O$ in piccoli cristalli brillanti. Di essi non trovo precedenti studi e per ciò reputo utile descriverli nella presente Nota.

[1] *Il principio di minimo* ecc. (Rend. del Circ. Matem. di Palermo, tomo 22), §§ 5 e seg.

[2] Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia della R. Università di Roma.

[3] C. Manuelli e M. Cingolani, *I seleniati di torio*. Rendiconti Soc. Chim. di Roma, anno IV, n. 10, pag. 87, 1906.