ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Meccanica. — *Sulle equazioni dell'elasticità.* Nota di E. ALMANSI, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

1. In alcune mie ricerche sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi, ho fatto uso di certe relazioni fra le tensioni interne, le quali, per la loro simmetria, si prestano bene all'esame dello stato di deformazione di un corpo, essendo note le tensioni agenti in superficie.

Riferiti i punti dello spazio ad un sistema di assi ortogonali $0(x, y, z)$, diciamo

$$\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33},$$
$$\tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{12},$$

le sei tensioni interne fondamentali. Esse soddisfano le tre condizioni di equilibrio

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} + \mathrm{X} = 0, \text{ ecc.} \tag{1}$$

ed altre sei equazioni, a cui, nell'ipotesi che le componenti X, Y, Z della forza di massa unitaria siano costanti, detto λ il *coefficiente di contrazione*, e posto $\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \mathrm{T}$, possiamo dare la forma

$$\tag{2} \left\{\begin{array}{ll} \Delta^2 \tau_{11} = -\dfrac{1}{1+\lambda} \dfrac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2}, & \Delta^2 \tau_{23} = -\dfrac{1}{1+\lambda} \dfrac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial y\, \partial z}, \\ \Delta^2 \tau_{22} = -\dfrac{1}{1+\lambda} \dfrac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial y^2}, & \Delta^2 \tau_{31} = -\dfrac{1}{1+\lambda} \dfrac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial z\, \partial x}, \\ \Delta^2 \tau_{33} = -\dfrac{1}{1+\lambda} \dfrac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial z^2}, & \Delta^2 \tau_{12} = -\dfrac{1}{1+\lambda} \dfrac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x\, \partial y}, \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\Delta^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right).} \end{array}\right.$$

Queste sei equazioni si ottengono combinando le equazioni (1) colle altre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{E}} \{(1+\lambda)\tau_{11} - \lambda \mathrm{T}\}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{E}} 2(1+\lambda)\tau_{12}, \text{ ecc.,} \tag{3}$$

$$(\mathrm{E} = \text{cost.} = \textit{modulo di elasticità})$$

che legano le componenti u, v, w degli spostamenti alle tensioni.

Sono appunto le (2) quelle relazioni fra le tensioni interne a cui accenno sopra, e delle quali più volte mi son valso.

Non ho però mai dimostrato che *qualunque* sistema di sei funzioni regolari $\tau_{11}, \tau_{12} \dots$ soddisfacenti alle equazioni (1) e (2), corrisponde ad un possibile stato di deformazione del corpo: che, cioè, *se le equazioni* (1) *e* (2) *sono soddisfatte, esistono sempre tre funzioni* u, v, w *legate alle* $\tau_{11}, \tau_{12} \dots$ *dalle formule* (3).

Sebbene la dimostrazione non presenti alcuna difficoltà, credo utile esporla in questa breve Nota.

2. Denotiamo con $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} \dots$ i secondi membri delle formule (3); ossia poniamo

$$(4) \qquad \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\lambda)\tau_{11} - \lambda T \right\} \quad , \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{E} 2(1+\lambda)\tau_{12}, \text{ ecc.}$$

La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di tre funzioni u, v, w, che soddisfino le (3), è espressa dalle sei equazioni:

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial y \, \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial z^2}, \text{ ecc.}$$

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} \right\} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y \, \partial z}, \text{ ecc.}$$

Si tratta dunque di dimostrare che queste sei equazioni, sostituendo alle ε le loro espressioni date dalle formule (4), e tenendo conto delle equazioni (1) e (2) risultano identicamente verificate.

3. Consideriamo l'equazione (5) sopra scritta. Tenendo conto delle (4) e sopprimendo il fattore $\frac{1}{E}$ essa diventa

$$2(1+\lambda) \frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial y \, \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ (1+\lambda)\tau_{33} - \lambda T \right\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ (1+\lambda)\tau_{22} - \lambda T \right\},$$

ovvero

$$(7) \qquad 2(1+\lambda) \frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial y \, \partial z} = (1+\lambda) \left\{ \frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial z^2} \right\} - \lambda \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\}.$$

Ora deriviamo la prima delle equazioni (1) rispetto ad x, la seconda rispetto ad y, la terza rispetto a z, e sottragghiamo dalla prima le altre due. Otterremo:

$$\frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial y \, \partial z} = 0.$$

Quindi, sostituendo nella (7) l'espressione di $2 \frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial y \, \partial z}$ ricavata da questa:

$$(1+\lambda) \left\{ \frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial z^2} \right\} =$$
$$= (1+\lambda) \left\{ \frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial z^2} \right\} - \lambda \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\},$$

ossia:

$$\frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x^2} - \left\{ \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial z^2} \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial z^2} \right\} = - \frac{\lambda}{1+\lambda} \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\}.$$

Nel primo membro aggiungo e tolgo $\frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial x^2}$: avrò

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \Delta^2 \tau_{22} - \Delta^2 \tau_{33} = - \frac{\lambda}{1+\lambda} \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\}.$$

Sostituendo a $\Delta^2 \tau_{22}$ e $\Delta^2 \tau_{33}$ le loro espressioni

$$- \frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial y^{22}} \text{ e } - \frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

fornite dalla (2), l'equazione precedente si riduce a $\Delta^2 T = 0$: equazione che è verificata, come si riconosce dalle stesse (2), sommando le prime tre membro a membro.

4. Consideriamo ora l'equazione (6), che diventa, tenendo conto delle (4),

$$2(1+\lambda) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x} \right\} = 2 \frac{\partial^2}{\partial y \, \partial z} \{ (1+\lambda) \tau_{11} - \lambda T \},$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x} \right\} = \frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial y \, \partial z} - \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial y \, \partial z}. \tag{8}$$

Dalla equazione (1), derivando la terza rispetto ad y, la seconda rispetto a z, e sommando, si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} \right\} + \frac{\partial^2 (\tau_{22} + \tau_{33})}{\partial y \, \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial z^2} = 0.$$

Aggiungo e tolgo $\frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x} \right\} + \frac{\partial^2 (\tau_{22} + \tau_{33})}{\partial y \, \partial z} + \Delta^2 \tau_{23} = 0.$$

Dal confronto di questa colla (8) si ricava:

$$\Delta^2 \tau_{23} = - \frac{\partial^2 (\tau_{22} + \tau_{33})}{\partial y \, \partial z} - \frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial y \, \partial z} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial y \, \partial z} =$$
$$= - \frac{\partial^2 (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})}{\partial y \, \partial z} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial y \, \partial z} = - \frac{\partial^2 T}{\partial y \, \partial z} +$$
$$+ \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial y \, \partial x} = - \frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial y \, \partial z},$$

si ottiene, cioè, una delle equazioni (2).

Quello che si è dimostrato per le equazioni (5) e (6) vale per le altre analoghe. Esistono dunque le funzioni u, v, w. Quindi, conoscendo le tensioni che agiscono sulla superficie di un solido elastico isotropo, soggetto a forze di masse costanti, noi ci possiamo proporre di determinare le tensioni interne in modo che in tutti i punti del solido siano soddisfatte le equazioni (1) e (2), e in superficie le tensioni assumano i valori assegnati.

Le equazioni (2), rispetto ad altri gruppi d'equazioni di cui si può ugualmente far uso (per es. le nostre (7) ed (8) e le loro analoghe), presentano il vantaggio di esser tutte della stessa forma. Se denotiamo con x_1, x_2, x_3 le coordinate x, y, z, possiamo rappresentare le sei equazioni (2) mediante l'unica formula:

$$\Delta^2 \tau_{ij} = -\frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \, \partial x_j}.$$

Meccanica. — *Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici.* Nota del prof. E. Almansi, presentata dal Socio Vito Volterra.

1. Si consideri un solido elastico isotropo che occupi uno spazio cilindrico S. Diciamo σ le sezioni piane normali all'asse del cilindro (luogo dei baricentri delle sezioni stesse), σ' e σ'' le due sezioni estreme.

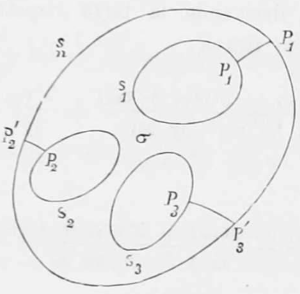

Fig. 1.

Lo spazio S sia a connessione multipla: una sezione σ sarà limitata da un certo numero di linee chiuse, che denoteranno con $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (fig. 1).

Riferiamo i punti dello spazio ad una terna di assi ortogonali, prendendo come asse delle z l'asse del cilindro.

Noi ci proponiamo di determinare lo stato più generale di deformazione del solido supponendo:

1°, che i suoi elementi non siano soggetti a forze di massa;