

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Quello che si è dimostrato per le equazioni (5) e (6) vale per le altre analoghe. Esistono dunque le funzioni  $u, v, w$ . Quindi, conoscendo le tensioni che agiscono sulla superficie di un solido elastico isotropo, soggetto a forze di masse costanti, noi ci possiamo proporre di determinare le tensioni interne in modo che in tutti i punti del solido siano soddisfatte le equazioni (1) e (2), e in superficie le tensioni assumano i valori assegnati.

Le equazioni (2), rispetto ad altri gruppi d'equazioni di cui si può ugualmente far uso (per es. le nostre (7) ed (8) e le loro analoghe), presentano il vantaggio di esser tutte della stessa forma. Se denotiamo con  $x_1, x_2, x_3$  le coordinate  $x, y, z$ , possiamo rappresentare le sei equazioni (2) mediante l'unica formula:

$$\Delta^2 \tau_{ij} = - \frac{1}{1 + \lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}.$$

**Meccanica.** — *Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici.* Nota del prof. E. ALMANSI, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

1. Si consideri un solido elastico isotropo che occupi uno spazio cilindrico  $S$ . Diciamo  $\sigma$  le sezioni piane normali all'asse del cilindro (luogo dei baricentri delle sezioni stesse),  $\sigma'$  e  $\sigma''$  le due sezioni estreme.

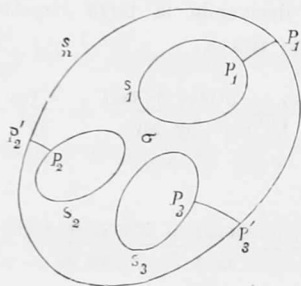


FIG. 1.

Lo spazio  $S$  sia a connessione multipla: una sezione  $\sigma$  sarà limitata da un certo numero di linee chiuse, che denoteranno con  $s_1, s_2, \dots, s_n$  (fig. 1).

Riferiamo i punti dello spazio ad una terna di assi ortogonali, prendendo come asse delle  $z$  l'asse del cilindro.

Noi ci proponiamo di determinare lo stato più generale di deformazione del solido supponendo:

1°, che i suoi elementi non siano soggetti a forze di massa;

2°, che gli elementi della sua superficie esterna paralleli all'asse (sup. laterale) non siano sollecitati;

3°, che le tensioni interne dipendano dalla sola variabili  $x, y$ .

Troveremo che la deformazione più generale soddisfacente a queste condizioni si può scomporre in una deformazione  $D_0$ , che rientra nei casi esaminati dal Saint-Venant, ed a cui corrisponderanno, per conseguenza, componenti di spostamento *monodrome*; e in una deformazione  $D$  per cui tale condizione non è verificata. Nella deformazione  $D$  le sei tensioni interne fondamentali sono espresse dalle formole

$$(1) \quad \tau_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \tau_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{33} = \lambda \Delta^2 \Phi,$$

$$(2) \quad \tau_{31} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{32} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

ove  $\Phi$  è una funzione bi-armonica ( $\Delta^2 \Delta^2 \Phi = 0$ ) delle variabili  $x, y$ ;  $\varphi$  una funzione delle stesse variabili che verifica l'equazione  $\Delta^2 \varphi = k = \text{cost.}$ ;  $\lambda$  il coefficiente di contrazione (\*).

2. Le sei tensioni interne devono verificare le tre equazioni

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} = 0, \dots (\tau_{12} = \tau_{21}, \text{ ecc.})$$

e le altre sei

$$\Delta^2 \tau_{11} = -\frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \Delta^2 \tau_{12} = -\frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, \dots$$

ove

$$T = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}.$$

Da queste ultime si ricava

$$\Delta^2 T = 0.$$

Poichè le tensioni non devono contenere la variabile  $z$ , le nove equazioni precedenti diventeranno:

$$(3) \quad \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} = 0,$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 \tau_{11} = -\frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ \Delta^2 \tau_{22} = -\frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \\ \Delta^2 \tau_{12} = -\frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, \end{array} \right. \quad (6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 \tau_{31} = 0, \\ \Delta^2 \tau_{32} = 0, \\ \Delta^2 \tau_{33} = 0, \end{array} \right.$$

(\*) Sulla teoria delle deformazioni regolari a spostamenti polidromi, veggansi le Note del prof. Volterra nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, a. 1904.

Nei punti della superficie laterale (che per ipotesi non è sollecitata), se  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  e 0 denotano i coseni della normale (esterna o interna) si dovrà avere:

$$(7) \quad \begin{cases} \tau_{11} \cos \alpha + \tau_{12} \cos \beta = 0, \\ \tau_{21} \cos \alpha + \tau_{22} \cos \beta = 0, \\ \tau_{31} \cos \alpha + \tau_{32} \cos \beta = 0. \end{cases}$$

3. In virtù delle equazioni (3) potremo porre:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{\partial \Phi'}{\partial y}, & \tau_{12} &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \\ \tau_{21} &= \frac{\partial \Phi''}{\partial y}, & \tau_{22} &= -\frac{\partial \Phi''}{\partial x}, \end{aligned}$$

ove  $\Phi'$  e  $\Phi''$  sono funzioni delle variabili  $x, y$ . Poichè  $\tau_{12} = \tau_{21}$ , dovrà essere  $-\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = \frac{\partial \Phi''}{\partial y}$ , quindi  $\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ,  $\Phi'' = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ , la  $\Phi$  essendo una nuova funzione delle stesse variabili. Onde avremo:

$$(8) \quad \tau_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \tau_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Ricordiamo ora che si ha  $\mathcal{A}^2 T = \mathcal{A}^2(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = 0$ , e, per l'ultima delle (6),  $\mathcal{A}^2 \tau_{33} = 0$ ; quindi  $\mathcal{A}^2(\tau_{11} + \tau_{22}) = 0$ , e tenendo conto delle formule (8):

$$\mathcal{A}^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0$$

ovvero, trattandosi di funzioni delle sole variabili  $x, y$

$$(9) \quad \mathcal{A}^2 \mathcal{A}^2 \Phi = 0.$$

Dalle equazioni (8) si ricava:

$$\mathcal{A}^2 \tau_{11} = \frac{\partial^2 \mathcal{A}^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \mathcal{A}^2 \tau_{22} = \frac{\partial^2 \mathcal{A}^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \mathcal{A}^2 \tau_{12} = -\frac{\partial^2 \mathcal{A}^2 \Phi}{\partial x \partial y};$$

e dalla (9):  $\frac{\partial^2 \mathcal{A}^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \mathcal{A}^2 \Phi}{\partial x^2}$ . Perciò potremo scrivere:

$$\mathcal{A}^2 \tau_{11} = -\frac{\partial^2 \mathcal{A}^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \mathcal{A}^2 \tau_{22} = -\frac{\partial^2 \mathcal{A}^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \mathcal{A}^2 \tau_{12} = -\frac{\partial^2 \mathcal{A}^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Dal confronto di queste equazioni colle (5), posto

$$(10) \quad T = (1 + \lambda) \mathcal{A}^2 \Phi + G, \quad G = G(x, y)$$

abbiamo:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 0 .$$

Dovrà dunque essere  $G = mx + ny + p$ , ove  $m, n, p$  denotano delle costanti; e per la formula (10):

$$T = (1 + \lambda) A^2 \Phi + mx + ny + p .$$

Ma  $T = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$ , e, per le (8),  $\tau_{11} + \tau_{22} = A^2 \Phi$ ; quindi:

$$\tau_{33} = \lambda A^2 \Phi + mx + ny + p$$

Ora notiamo che il sistema di tensioni  $\tau_{33} = mx + ny + p$ ,  $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{12} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0$  corrisponde ad una deformazione del cilindro che rientra nei casi esaminati dal Saint-Venant. Poichè a noi interessa solo considerare la deformazione  $D$  (v. § 1), non la  $D_0$ , tralascieremo il termine  $mx + ny + p$ , ed avremo:

$$\tau_{33} = \lambda A^2 \Phi .$$

Finalmente, per la formula (4) potremo scrivere

$$\tau_{31} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad \tau_{32} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad \varphi = \varphi(x, y) .$$

Le (6), 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup>, diventeranno

$$\frac{\partial A^2 \varphi}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial A^2 \varphi}{\partial x} = 0$$

ossia dovrà essere

$$A^2 \varphi = k ,$$

$k$  denotando una costante.

Le nove equazioni (3), (4), (5) e (6) risultano così verificate. Le tensioni interne sono espresse dalle formule (1) e (2) c. v. d.

4. Teniamo conto ora delle condizioni ai limiti. Le formule (7), sostituendo alle tensioni le espressioni trovate, diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cos \alpha - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \beta = 0 \quad , \quad - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cos \beta = 0 , \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \beta = 0 . \end{aligned}$$

Dovremo dunque avere in ogni punto di una qualsiasi  $s_i$  delle  $n$  linee chiuse che costituiscono il contorno di una sezione  $\sigma$ , se con  $s_i$  denotiamo pure l'arco di quella linea misurato da un punto fisso:

$$(11) \quad \frac{\partial \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)}{\partial s_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)}{\partial s_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s_i} = 0 .$$

Sia  $s_n$  quella delle  $n$  linee  $s_i$  che racchiude tutte le altre. Rendiamo semplicemente connessa la sezione  $\sigma$  mediante  $n-1$  tagli congiungenti i punti  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  delle linee  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ , coi punti  $P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1}$  della linea  $s_n$ .

Le tensioni  $\tau_{11}, \tau_{12}, \dots$ , quindi per le formule (1) e (2), le derivate prime della  $\varphi$  e le derivate seconde della  $\Phi$ , dovranno esser funzioni ad un sol valore, in tutti i punti di  $\sigma$ ; mentre  $\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  potranno aver valori diversi dalle due parti dei tagli.

Le formule (11) esprimono la condizione che le funzioni  $\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  devono aver dei valori costanti in ciascuno dei segmenti in cui le  $n$  linee chiuse  $s_i$  sono divise dai punti  $P$  che limitano i tagli.

Ma le  $n-1$  linee  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$  contengono ciascuna un sol punto  $P$ : quindi per ognuna di esse le tre funzioni  $\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  dovranno ridursi a delle costanti.

Poichè le derivate prime della  $\varphi$ , e le derivate seconde della  $\Phi$  sono funzioni ad un sol valore in tutti i punti di  $\sigma$ , la differenza fra i valori di  $\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  dalle due parti di un taglio  $P_i P'_i$  dovrà essere la stessa in tutti i punti del taglio, e quindi nulla, essendo nulla nel punto  $P_i$  che appartiene ad una delle  $n-1$  linee interne  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ .

Dunque anche  $\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  sono funzioni ad un sol valore in tutti i punti di  $\sigma$ , compresa la linea  $s_n$ . E in una qualunque  $s_i$  delle  $n$  linee  $s_1, s_2, \dots, s_n$  dovrà essere

$$(12) \quad \begin{aligned} \varphi &= q_i \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= a_i, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = b_i, \end{aligned}$$

ove  $q_i, a_i, b_i$  rappresentano, per la linea  $s_i$ , delle costanti.

Dalle formule (12) si ricava (assegnato convenientemente un verso positivo a ciascuna linea  $s_i$ ):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_i} = b_i \cos \alpha - a_i \cos \beta = a_i \frac{\partial x}{\partial s_i} + b_i \frac{\partial y}{\partial s_i} = \frac{\partial (a_i x + b_i y)}{\partial s_i}$$

ossia:

$$\frac{\partial (\Phi - a_i x - b_i y)}{\partial s_i} = 0.$$

Con un ragionamento analogo al precedente troveremo che:  $\Phi - a_i x - b_i y$  deve essere una funzione ad un sol valore in tutti i punti di  $\sigma$ , e

costante su ciascuna delle  $n$  linee  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Onde avremo per la linea  $s_i$ :

$$(13) \quad \Phi = a_i x + b_i y + c_i \quad (c_i = \text{cost}).$$

Dalle formule (12), chiamando  $v_i$ , nei punti di  $s_i$ , la normale rivolta verso l'interno di  $\sigma$ , si ricava anche:

$$(14) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = \frac{\partial(a_i x + b_i y + c_i)}{\partial v_i}.$$

Le condizioni (13) e (14) possono esser sostituite alle (12).

5. Consideriamo la costante

$$(15) \quad M = \int_{\sigma} (x \tau_{32} - y \tau_{31}) d\sigma \quad (\text{momento torcente})$$

Se si compone la deformazione da noi esaminata con una semplice *torsione* del cilindro (ciò che non modifica affatto le nostre formule, come si riconosce avendo presenti quelle relative alla torsione semplice) si potrà fare in modo che risulti

$$M = 0.$$

Aggiungiamo questa nuova condizione, che in virtù delle formule (15) e (2), potremo scrivere

$$(16) \quad \int_{\sigma} \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\sigma = 0.$$

Essa stabilisce una relazione fra le costanti  $k$  e  $q_i$ , come si vede facilmente ponendo  $\varphi = k\varphi' + \varphi''$ , ove  $\varphi'$  rappresenti la funzione che verifica nell'area  $\sigma$  l'eq.  $\Delta^2 \varphi' = 1$  e si annulla al contorno, quindi  $\varphi''$  la funzione armonica che sulle linee  $s_i$  assume i valori  $q_i$ .

Per completare il nostro studio, vogliamo dimostrare che, quando sia soddisfatta anche la condizione (16), la deformazione da noi considerata non può essere una deformazione a spostamenti monodromi, a meno che tutte le tensioni non siano nulle.

6. Perciò teniamo conto delle formule

$$(17) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = A\tau_{11} - BT, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2A\tau_{12}, \text{ ecc. } (A, B = \text{cost.}, \frac{B}{A-B} = \lambda)$$

che legano le componenti di deformazione alle tensioni.

Introduciamo una funzione armonica  $\varphi_1(x, y)$  che soddisfi all'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \Delta^2 \Phi.$$

È sempre possibile determinare una tal funzione in un'area  $\sigma_0$  limitata da un segmento rettilineo  $s'$  parallelo all'asse delle  $y$  (fig. 2), da due segmenti  $s''$ ,  $s'''$  (eventualmente nulli) pure rettilinei e paralleli all'asse delle  $x$ , e da una linea  $s''''$  che sia incontrata in un sol punto da ogni parallela al detto asse. E si potrà sempre decomporre l'area  $\sigma$  in un certo numero di aree come  $\sigma_0$ .

Sulle linee di separazione fra le aree  $\sigma_0$ , la funzione  $\varphi_1$  e le sue derivate potranno presentare delle discontinuità.

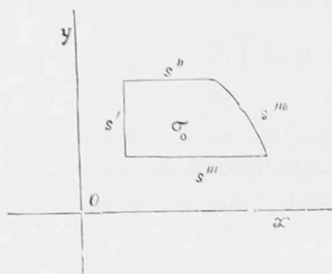


FIG. 2.

Introduciamo anche la funzione  $\varphi_2(x, y)$  legata alla  $\varphi(x, y)$  dalle equazioni

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{k}{2} y, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{k}{2} x,$$

che sono compatibili fra loro, poichè  $\mathcal{L}^2 \varphi = k$ .

Sarà facile verificare che le formule (17) risultano verificate quando si ponga

$$(18) \quad \begin{cases} u = -A \frac{\partial \Phi}{\partial x} + C \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + Akyz, \\ v = -A \frac{\partial \Phi}{\partial y} - C \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - Akxz, \\ w = 2A\varphi_2. \end{cases} \quad C = \frac{A(A - 2B)}{A - B}.$$

Supponiamo di rendere semplicemente connesso lo spazio  $S$  occupato dal cilindro, mediante  $n - 1$  tagli  $T_i$  formati da superficie  $\sum_i$  parallele all'asse e passanti per le linee  $P_i P'_i$  (§ 4) tracciate sopra  $\sigma$ . Poichè le tensioni interne, e quindi le componenti di deformazione, sono monodrome, noi potremo disporre dell'arbitrarietà che permane nelle funzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  in modo che gli spostamenti  $u, v, w$  non presentino discontinuità fuori delle superficie  $\sum_i$ .



Per dimostrare che  $u, v, w$  non possono esser continue in tutta l'area  $\sigma$ , a meno che tutte le tensioni non siano nulle, consideriamo la quantità essenzialmente positiva o nulla

$$Q = \int_{\sigma} \left\{ \tau_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{33} \frac{\partial w}{\partial z} + \right. \\ \left. + \tau_{23} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \tau_{31} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{12} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} d\sigma,$$

che si riduce a zero solo coll'annullarsi di tutte le tensioni. Dico che se  $u, v, w$  sono continue, dovrà essere  $Q = 0$ .

Si ha infatti in tale ipotesi

$$\int_{\sigma} \left\{ \tau_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{12} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} d\sigma = 0, \\ \int_{\sigma} \left\{ \tau_{31} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{32} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} d\sigma = 0$$

come si riconosce integrando per parti, e tenendo conto delle equazioni (3) e (4), e delle condizioni (7) ai limiti.

Inoltre, per la formola (18),  $\frac{\partial u}{\partial z} = Ak y$ ,  $\frac{\partial v}{\partial z} = -Ak x$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ; quindi

$$Q = Ak \int_{\sigma} (y \tau_{31} - x \tau_{32}) d\sigma = -AkM = 0, \quad (\text{v. } \S 5)$$

c. v. d.

**Matematica.** — *Esperienze illustrative per la teoria del Volterra su l'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi.* Nota di LUIGI ROLLA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

**Matematica.** — *Encore une observation sur les fonctions dérivées.* Nota di HENRI LEBESGUE, presentata dal Socio C. SEGRE.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.