ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Sopra una questione di minimo, che si riconnette col problema di Dirichlet.* Nota del dott. S. MEDICI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

In una Nota recente [1] il prof. Fubini ha dimostrato, che il problema di Dirichlet, sotto certe ipotesi, si può considerare come limite di un ordinario problema di minimo.

La ricerca del prof. Fubini si basa su un teorema la cui dimostrazione è oggetto della presente Nota: a prima vista sembrerebbe, che tale dimostrazione richiedesse un lungo calcolo, ma questo si può evitare con un semplice artificio.

Premettiamo una definizione (cfr. Fubini, loc. cit.). Siano x, y, z coordinate cartesiane ortogonali: diremo *pseudoarea* di un triangolo il valore assoluto dell'area della proiezione ortogonale del triangolo sul piano xy, moltiplicato per il quadrato della tangente dell'angolo che il piano del triangolo fa col piano xy. Da semplici formule di geom. analitica si ha allora, che se indichiamo con $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$, $x_3\, y_3\, z_3$ le coordinate dei vertici, tale *pseudoarea* Δ è data da

$$(1) \qquad \Delta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2}{\left\| \begin{matrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{matrix} \right\|},$$

Diremo poi pseudoarea dell'angoloide, che si ottiene proiettando da un punto (X, Y, Z) una spezzata chiusa, e le cui faccie si suppongono terminate a questa spezzata, la somma delle pseudoaree dei vari triangoli, che ne formano le faccie. Sicchè, se indichiamo con $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$, ..., $x_n\, y_n\, z_n$ le coordinate dei vertici della spezzata, con X Y Z quelle del centro da cui si proietta, si ha che la pseudoarea D è data da

$$(2) \qquad \mathrm{D} = \sum_{1}^{1\ldots n} \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_{i+1} & z_{i+1} \\ 1 & \mathrm{X} & \mathrm{Z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_{i+1} & z_{i+1} \\ 1 & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{vmatrix}^2}{\left\| \begin{matrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & \mathrm{X} & \mathrm{Y} \end{matrix} \right\|},$$

dove però all'indice $n+1$ si sostituisca l'indice 1.

[1] Fubini, *Il problema di Dirichlet*, ecc. (Questi Rendic., questo tomo).

Il teorema, che ora vogliamo dimostrare è il seguente:

Se $A_1 A_2 \ldots A_n$ *è una spezzata chiusa data nello spazio, e se* A_0 *è un punto tale che l'angoloide* $A_0 (A_1 A_2 \ldots A_n)$ *si proietti ortogonalmente in un modo biunivoco sul piano* xy *ed abbia pseudoarea non maggiore di ogni altro angoloide* $A'_0 (A_1 A_2 \ldots A_n)$, *il cui vertice* A'_0 *giace sulla retta che proietta* A_0, *nessun piano può tagliare l'angoloide* $A_0 (A_1 A_2 \ldots A_n)$ *in una linea chiusa.*

Indichiamo con $B_0, B_1, \ldots, B_n$ le proiezioni ortogonali di $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sul piano xy; perchè la proiezione dell'angoloide $A_0 (A_1 A_2 \ldots A_n)$ sul piano xy sia biunivoca occorre, che le proiezioni delle varie faccie non abbiano parti comuni, cioè che le rette $B_0 B_1, B_0 B_2, \ldots, B_0 B_n, B_0 B_1$ si susseguano tutte nello stesso senso per cui B_0 dovrà essere intanto interno al poligono $B_1 B_2 \ldots B_n$. Ciò porta di più che i triangoli $B_0 B_1 B_2, B_0 B_2 B_3, \ldots, B_0 B_n B_1$ hanno tutti aree dello stesso segno, e che perciò nella (2) invece di mettere il segno di valore assoluto ai soli denominatori si può includere nel segno stesso tutto il secondo membro.

Perchè poi sia verificata l'altra condizione sulle pseudoaree degli angoloidi che proiettano la spezzata dai varii punti della retta $A_0 B_0$, occorre che nel punto A_0 si annulli la derivata di D rapporto a Z: cioè che sia

$$(3) \qquad \sum_i^{1\ldots n} \frac{\begin{vmatrix} x_i - X & z_i - Z \\ x_{i+1} - X & z_{i+1} - Z \end{vmatrix} (x_{i+1} - x_i) + \begin{vmatrix} y_i - Y & z_i - Z \\ y_{i+1} - Y & z_{i+1} - Z \end{vmatrix} (y_{i+1} - y_i)}{\begin{vmatrix} x_i - X & y_i - Y \\ x_{i+1} - X & y_{i+1} - Y \end{vmatrix}} = 0,$$

colla solita avvertenza riguardo all'indice $n+1$; e questa condizione basta, poichè è sempre $\frac{\partial^2 D}{\partial^2 Z} > 0$.

Osserviamo ora, che se c'è un piano π, che taglia l'angoloide $A_0 (A_1 A_2 \ldots A_n)$ in una linea chiusa, esso, incontrando tutti i segmenti $A_0 A_1, A_0 A_2, \ldots, A_0 A_n$, lascia da una stessa parte tutti i vertici della spezzata, e dalla parte opposta A_0; perciò il piano π' parallelo a π per A_0 lascia da una stessa parte tutti i vertici della spezzata. Viceversa, se c'è un piano π' per A_0, che soddisfa a tale condizione, ogni piano π parallelo a π', che disti da π meno di ogni vertice della spezzata, e che giaccia rispetto a π' dalla stessa parte della spezzata stessa, sega l'angoloide in una linea chiusa. Dovremo dunque dimostrare, che nessun piano per A_0 può lasciare i vertici $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tutti da una stessa parte.

Supponiamo dapprima, che il piano non sia parallelo all'asse delle z, ed abbia per equazione

$$(4) \qquad z - Z = \alpha(x - X) + \beta(y - Y).$$

Se poniamo

$$z_i - Z = \alpha(x_i - X) + \beta(y_i - Y) + a_i, \tag{5}$$

la (3) diviene [1]

$$\sum_i^{1\ldots n} \frac{\begin{vmatrix} x_i & -X & a_i \\ x_{i+1} & -X & a_{i+1} \end{vmatrix} (x_{i+1} - x_i) + \begin{vmatrix} y_i & -Y & a_i \\ y_{i+1} & -Y & a_{i+1} \end{vmatrix} (y_{i+1} - y_i)}{\begin{vmatrix} x_i & -X & y_i & -Y \\ x_{i+1} & -X & y_{i+1} & -Y \end{vmatrix}} = 0 . \tag{6}$$

Questa ci dice, che se consideriamo la spezzata $C_1 C_2 \ldots C_n$, il cui i^{mo} vertice ha per coordinate

$$x_i , y_i , z'_i = z_i - \alpha(x_i - X) - \beta(y_i - Y) \qquad (i = 1 , \ldots , n),$$

l'angoloide $A_0(C_1 C_2 \ldots C_n)$ soddisfa ancora a tutte le condizioni del teorema enunciato, poichè le due spezzate $A_1 A_2 \ldots A_n$ e $C_1 C_2 \ldots C_n$ hanno la stessa proiezione sul piano xy, e la equazione analoga alla (3), per le (5), si riduce alla (6).

Ora se il piano (4) lasciasse da una stessa parte tutti i punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se cioè le a_i avessero tutte lo stesso segno il piano $z - Z = 0$ lascierebbe da una stessa parte tutti i vertici $C_1 C_2 \ldots C_n$. Ci sarebbe dunque, se potesse darsi quel caso un piano π parallelo al piano xy, che segherebbe l'angoloide $A_0(C_1 C_2 \ldots C_n)$ in una linea chiusa. Ma questo caso, come ha già osservato il prof. Fubini, non si può dare, perchè indicando con A'_0 la proiezione di A_0 su π, l'angoloide $A'_0(C_1 C_2 \ldots C_n)$ avrebbe pseudoarea minore di quella dell'angoloide $A_0(C_1 C_2 \ldots C_n)$, contro quanto abbiamo visto. Il teorema è così dimostrato per tutti i piani non paralleli all'asse delle z: per quelli paralleli all'asse delle z la cosa è quasi evidente. Infatti se un piano π per A_0 e parallelo all'asse delle z lasciasse da una stessa parte tutti i punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$, la retta r d'intersezione di π col piano xy, dovrebbe lasciare da una stessa parte $B_1, B_2, \ldots, B_n$, ciò che è assurdo, r passando per il punto B_0 interno al poligono $B_1 B_2 \ldots B_n$. Il teorema è così completamente dimostrato.

[1] Basta ricordare, che $\sum_i (x_{i+1} - x_i) = \sum_i (y_{i+1} - y_i) = 0$.