ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Sur les formes différentielles m-linéaires.* Nota di TH. DE DONDER (a Bruxelles), presentata dal Corrispondente E. PASCAL.

M. le Professeur E. Pascal a approfondi récemment ses belles recherches sur la propriété que présentent certaines *matrices* [1] d'avoir une *caractéristique* invariante pour toutes les transformations ponctuelles. Ces recherches m'ont beaucoup intéressé.

Pour établir cette propriété par la transformation infinitésimale

$$\frac{\delta x_i}{X_i} = \delta t \qquad (i = 1 \dots n)$$

il suffit de montrer que la variation $\frac{\delta}{\delta t}$ d'un déterminant quelconque pris dans cette matrice est égale à un polynome linéaire et homogène de déterminants du même ordre, ceux-ci étant *tous* pris dans cette même matrice.

Considérons, par exemple, la forme différentielle

$$\sum_i \sum_j \sum_k a_{ijk}\, d_1\, x_i\, d_2\, x_j\, d_3\, x_k$$

et séparons, d'après M. Pascal, les indices en *2 séries distinctes*: les i, j et les k; disposons les éléments a_{ijk} dans la matrice:

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11\,1} & a_{11\,2} & \dots & a_{11\,n} \\ a_{21\,1} & a_{21\,2} & \dots & a_{21\,n} \\ a_{12\,1} & a_{12\,2} & \dots & a_{12\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nn\,1} & a_{nn\,2} & \dots & a_{nn\,n} \end{array} \right\| .$$

En se rappelant que

$$\frac{\delta}{\delta t} a_{ijk} = -\sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{\partial X_\rho}{\partial x_i} a_{\rho jk} + \frac{\partial X_\rho}{\partial x_j} a_{i\rho k} + \frac{\partial X_\rho}{\partial x_k} a_{ij\rho} \right)$$

[1] Pascal, *Sulle matrici formate cogli elementi di un sistema covariante* (Atti R. Istituto Veneto, 1905-1906, t. LXV. Parte seconda); *Su di una generalizzazione delle forme differenziali e dei sistemi covarianti del calcolo differenziale assoluto* (Rend. Cir. Mat., di Palermo, t. XXIII, 1907).

on calculera aisément

$$\frac{\delta}{\delta t}\begin{vmatrix} a_{ijk} & a_{ijk'} \\ a_{i'j'k} & a_{i'j'k'} \end{vmatrix};$$

on trouvera ainsi une expression linéaire et homogène en ces déterminants; donc si ceux-ci sont tous nuls, les déterminants analogues formés avec les coefficients a'_{ijk} de la forme différentielle ayant subi la transformation ponctuelle seront aussi tous nuls; si, au contraire, les déterminants considérés ne sont pas tous nuls, on pourra en conclure, grâce à la transformation ponctuelle *inverse*, que tous les déterminants formés avec les a'_{ijk} ne seront pas tous nuls.

Ce qui précède s'étend immédiatement des déterminants d'ordre p aux déterminants d'ordre $p+1$.

Le mode de démonstration que je viens d'indiquer me semble surtout avantageux, quand, au lieu de considérer 2 séries distinctes d'indices, on en considère un plus grand nombre; dans cette hypothèse la matrice et les déterminants qu'elle renferme auront *plus de deux dimensions. Le théorème de M. Pascal s'étend à ce cas général.*

En effet, supposons, par exemple, qu'il y ait 3 séries d'indices dans les coefficients, a_{ijk}; écrivons d'abord le déterminant cubique du 2ᵈ ordre:

$$(i\,i', j\,j', k\,k') \equiv \begin{vmatrix} a_{ijk} & a_{ij'k} \\ a_{i'jk} & a_{i'j'k} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{ijk'} & a_{ij'k'} \\ a_{i'jk'} & a_{i'j'k'} \end{vmatrix}$$

D'où

$$\frac{\delta}{\delta t}(i\,i', j\,j', k\,k') =$$

$$= -\sum_{\rho}\left[\frac{\partial X_\rho}{\partial x_i}(\rho\, i', j\,j', k\,k') + \cdots + \frac{\partial X_\rho}{\partial x_{k'}}(i\,i', j\,j', k\,\rho)\right].$$

Entre les crochets [ ] il y a 6 termes, dont 2 seulement ont été transcrits ici.

La variation de $(i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p, k_1 \ldots k_p)$ s'exprime de même au moyen d'un polynome linéaire et homogène de ces déterminants. Donc on pourra conclure, comme précédemment, que la matrice (à 3 dimensions) formée avec les a_{ijk} et renfermant *tous* les déterminants (à 3 dimensions) considérés et *ceux-ci seulement* aura une caractéristique invariante.

On démontrerait de la même manière qu'on peut écrire une matrice (à 3 dimensions) formée avec les $a_{ij,k,l}$ et ayant une caractéristique invariante.

On peut aussi trouver des matrices à caractéristique invariante renfermant d'autres quantités que les coefficients d'une forme différentielle m-linéaire. Pour le prouver il suffit de remarquer qu'il est permis de remplacer les éléments $a_{ij,k,l}$ par des expressions cogrédientes à ces coefficients, telles que, par exemple,

$$\begin{bmatrix} ijk \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ikj \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kij \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} jik \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} jki \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} kji \\ l \end{bmatrix}$$

où $\begin{bmatrix} ijk \\ l \end{bmatrix}$ est le premier symbole de Christoffel appliqué à une forme 3-linéaire asymétrique.

L'étude du Mémoire de M. Pascal: « *Sui determinanti composti e su di un covariante estensione dell'Hessiano di una forma algebrica* » (1) m'a amené à considérer les n^m formes différentielles à n variables, m-linéaires et asymétriques:

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_m} a^{(1)}_{i_1 \dots i_m} d_1 x_{i_1} \dots d_m x_{i_m} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_{i_1} \dots \sum_{i_m} a^{(n^m)}_{i_1 \dots i_m} d_1 x_{i_1} \dots d_m x_{i_m} \\ \qquad i_1, \dots i_m = 1, \dots n . \end{array} \right.$$

On aura la cogrédience:

$$(2) \qquad \mathrm{K} \equiv |a^l_{i_1 \dots i_m}| <> \mathrm{M}^{m \cdot n^{m-1}}$$

$$l = 1, \dots n^m .$$

K est le déterminant d'ordre n^m formé avec les coefficients des n^m formes considérées.

Le signe $<>$ se lit « *cogrédient à* » et signifie que les quantités qu'il sépare subissent les *mêmes* transformations par suite du changement des variables $x_1, \dots x_n$.

M est un dernier-multiplicateur; autrement dit: on a l'invariant intégral

$$\int^n \mathrm{M}\, dx_1 \dots dx_n = \int^n \mathrm{M}'\, dx'_1 \dots dx'_n$$

d'où

$$\mathrm{M}' = \mathrm{M} \frac{\partial(x_1 \dots x_n)}{\partial(x'_1 \dots x'_n)} .$$

(1) Rendiconti Circ. Matem. di Palermo, t. XXII, 1906.

Pour trouver la cogrédience (2), on calcule la variation $\frac{\delta}{\delta t}$ de K; après avoir remarqué que chacun des $\frac{\partial X_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$ doit y figurer un *même* nombre de fois, on trouve immédiatement:

$$\frac{\delta K}{\delta t} = - m \, . \, n^{m-1} \; K \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right)$$

ce qui fournit la cogrédience (2), puisqu'on a:

$$\frac{\delta M^p}{\delta t} = - p \; M^p \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right) .$$

Ce déterminant K est intimement lié au déterminant de Kronecker, que M. Pascal a étudié dans le Mémoire en question.

Il existe d'autres cogrédiences intéressantes relatives au système (1); ces cogrédiences présentent une grande analogie avec celles que j'ai données à la fin de mon travail « *Sur les fonctions de Volterra et les invariants intégraux* » [1]; elles pourraient être utilisées de la même manière; pour plus de simplicité je supposerai $m = 2$; dans ce cas, on a:

$$K \equiv | a_{ik}^{l} | <> M^{2n}$$

$$\frac{\text{mineur } a_{ik}^{l}}{K} <> (-1)^{i+k} \, d_1 \, x_i \, d_2 \, x_k \equiv X_{ik}^{1}$$

$$\frac{\text{mineur} \begin{vmatrix} a_{ik}^{l} & a_{i'k'}^{l} \\ a_{ik}^{l'} & a_{i'k'}^{l'} \end{vmatrix}}{K} <> X_{ik}^{1} \, X_{i'k'}^{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_{ik}^{l}}{K} <> X_{l}^{ik} \, .$$

Dans cette dernière cogrédience, on calculera directement la variation de $\frac{a_{ik}^{l}}{K}$; l'on aura ainsi celle de X_{l}^{ik}. On pourrait aussi rapprocher cette cogrédience de la suivante [2]:

$$\frac{a_{ik}}{M^2} <> (-1)^{i+k} \, \xi_1^{i} \, \xi_2^{k}$$

(1) Bull. de l'Ac. R. de Belgique. Cl. des Sc. n. 6 (1906).
(2) Voir page 13 de mon article « *Sur les fonctions de Volterra* ... ».

d'où:

$$X_1^{ik} <> (-1)^{i+k} \xi_1^i \xi_2^k M^{2(n-1)} .$$

Considérons enfin les $\binom{n+m-1}{m}$ formes différentielles à n variables, m-linéaires et symétriques:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{i_1} \dots \sum\limits_{i_m} a^1_{i_1 \dots i_m} d_1 x_{i_1} \dots d_m x_{i_m} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum\limits_{i_1} \dots \sum\limits_{i_m} a^{\binom{n+m-1}{m}}_{i_1 \dots i_m} d_1 x_{i_1} \dots d_m x_{i_m} \end{array}\right.$$

Nous obtenons:

$$S \equiv | a^l_{i_1 \dots i_m} | <> M^{\binom{n+m-1}{n}}$$

$$\left(\begin{array}{c} i_1, \dots i_m = 1, \dots n \\ l = 1, \dots \binom{n+m-1}{m} \end{array} \right) .$$

La démonstration se fait comme pour le déterminant K.

Cette cogrédience est ici l'analogue de l'égalité que M. Pascal a démontrée concernant le déterminant de Scholtz-Hunyady.

Matematica. — *Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration.* Nota di HENRI LEBESGUE, presentata dal Socio C. SEGRE.

Mr. Volterra [1] a montré que l'intégration au sens de Riemann ne permettait pas toujours la recherche des fonctions primitives pour les fonctions dérivées bornées; au contraire, si l'on adopte les définitions que j'ai données, *l'intégrale indéfinie d'une fonction dérivée bornée existe toujours et est toujours une de ses fonctions primitives.* Cet énoncé, qui reste exact quand aux mots « une fonction dérivée bornée » on substitue les mots « un nombre dérivé borné », ne s'applique plus aux nombres dérivés qui, tout en étant partout finis, ne sont pas bornés. J'ai donné pour ce cas les deux énoncés équivalents suivants:

I. *La condition nécessaire et suffisante, pour que l'intégrale indéfinie*

[1] *Sui Principii del Calcolo Integrale* (Giornale de Battaglini, t. XIX).