ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

d'où:

$$X_1^{ik} <> (-1)^{i+k}\, \xi_1^i\, \xi_2^k\, M^{2(n-1)}\,.$$

Considérons enfin les $\binom{n+m-1}{m}$ formes différentielles à n variables, m-linéaires et symétriques:

$$\left\{\begin{array}{l}
\sum\limits_{i_1} \cdots \sum\limits_{i_m} a^1_{i_1 \cdots i_m}\, d_1 x_{i_1} \ldots d_m x_{i_m} \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\sum\limits_{i_1} \cdots \sum\limits_{i_m} a^{\binom{n+m-1}{m}}_{i_1 \cdots i_m}\, d_1 x_{i_1} \ldots d_m x_{i_m}
\end{array}\right.$$

Nous obtenons:

$$S \equiv |a^l_{i_1 \cdots i_m}| <> M^{\binom{n+m-1}{n}}$$

$$\left(\begin{array}{c} i_1, \ldots i_m = 1, \ldots n \\ l = 1, \ldots \binom{n+m-1}{m} \end{array}\right).$$

La démonstration se fait comme pour le déterminant K.

Cette cogrédience est ici l'analogue de l'égalité que M. Pascal a démontrée concernant le déterminant de Scholtz-Hunyady.

Matematica. — *Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration.* Nota di Henri Lebesgue, presentata dal Socio C. Segre.

Mr. Volterra [1] a montré que l'intégration au sens de Riemann ne permettait pas toujours la recherche des fonctions primitives pour les fonctions dérivées bornées; au contraire, si l'on adopte les définitions que j'ai données, *l'intégrale indéfinie d'une fonction dérivée bornée existe toujours et est toujours une de ses fonctions primitives.* Cet énoncé, qui reste exact quand aux mots « une fonction dérivée bornée » on substitue les mots « un nombre dérivé borné », ne s'applique plus aux nombres dérivés qui, tout en étant partout finis, ne sont pas bornés. J'ai donné pour ce cas les deux énoncés équivalents suivants:

I. *La condition nécessaire et suffisante, pour que l'intégrale indéfinie*

[1] *Sui Principii del Calcolo Integrale* (Giornale de Battaglini, t. XIX).

d'un nombre dérivé partout fini soit une de ses fonctions primitives, est que ce nombre dérivé soit sommable, c'est-à-dire ait une intégrale à mon sens.

II. *La condition nécessaire et suffisante, pour que l'intégrale indéfinie d'un nombre dérivé partout fini soit une de ses fonctions primitives, est que ses fonctions primitives soient à variation bornée* (1).

On peut se demander ensuite dans quel cas l'intégration indéfinie permet de remonter d'un nombre dérivé, fini ou infini, à sa fonction primitive, mais il faut tout d'abord remarquer que la question n'a pas toujours de sens. Mr. Hans Hahn (2) a en effet construit deux fonctions f_1 et f_2 ayant partout la même dérivée déterminée sans que $f_1 - f_2$ soit constante; de sorte que, lorsqu'il ne s'agit plus de quantités finies, la connaissance de la derivée, ou d'un nombre dérivé (3), ne suffit pas toujours à déterminer la fonction à une constante additive près.

On peut cependant se demander dans quels cas une fonction est l'intégrale indéfinie d'un de ses nombres dérivés, fini ou non; en entendant par là que, pour le calcul de l'intégrale du nombre dérivé Λ, on ne tiendra compte que des points où Λ est fini. De sorte que cette intégrale est celle de la fonction φ égale à Λ quand il est fini et à zéro partout ailleurs. Seulement, dans l'énoncé de la condition nécessaire et suffisante, devront intervenir des conditions relatives à la fonction primitive, car des deux fonctions f_1, f_2 de Mr. Hahn, une et une seule est l'intégrale indéfinie de leur commune dérivée.

On ne pourra donc pas avoir d'énoncé analogue au théorème I rappelé plus haut, c'est-à-dire ne faisant intervenir que des propriétés du nombre dérivé; mais on va voir que d'une propriété que j'ai indiquée autrefois résulte de suite un énoncé analogue à II, c'est-à-dire ne faisant intervenir que des propriétés de la fonction primitive (4).

(1) J'ai donné ces théorèmes dans mes *Leçons sur l'Intégration, etc.* A leur sujet différentes observations ont été présentées en 1906 et 1907 dans ces Rendiconti par M. B. Levi et par moi même. Ces théorèmes ne sont pas mis en question; il est vrai que, dans son premier travail composé de 3 notes, M. Levi avait substitué à mes énoncés celui qu'on lira plus loin mais mes énoncés furent, par la suite, justifiés par M. Levi lui-même.

(2) Ueber den Fondamentalsatz der Integralrechnung (Monatshefte für Math. und Phys., XVI Jahrg., pages 161-166); voir aussi les Notes de M. Levi (Rendiconti 1906).

(3) Ou encore si l'on veut de ses quatre nombres dérivés. Car il suffit évidemment d'ajouter aux deux fonctions f_1 et f_2 de M. H. Hahn une même fonction φ à nombres dérivés bornés, qui ne soit pas dérivable en tous les points où la dérivée de f_1 est finie pour obtenir deux fonctions non dérivables $f_1 + \varphi$, $f_2 + \varphi$, ayant partout les quatre mêmes nombres dérivés, et dont la différence n'est pas constante.

(4) Dans ces Rendiconti (vol. XV, 1° sem., page 679 et 2° sem., page 358) M. Beppo Levi a énoncé, comme constituant la condition nécessaire et suffisante cherchée, les 3 conditions qui suivent:

qu'à tout ensemble de valeurs de la variable, qui est de mesure nulle, corresponde un ensemble de valeurs de la fonction primitive $f(x)$ qui soit aussi de mesure nulle;

Cette condition nécessaire et suffisante peut s'exprimer ainsi: *pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit l'intégrale indéfinie d'un de ses nombres dé-*

---

que le nombre dérivé considéré $\varDelta$ ne soit infini que pour un ensemble de valeurs de x de mesure nulle;

et que, cet ensemble de valeurs de x excepté, $\varDelta$ ait une intégrale.

Tout énoncé de cette nature, c'est-à-dire faisant intervenir des propriétés de f et de $\varDelta$, a le gros inconvénient de nécessiter l'étude de f et $\varDelta$ avant de permettre d'écrire entre ces fonctions l'égalité $f = \int \varDelta\, dx$.

Je dois ajouter que la démonstration de M. Levi ne m'a pas paru suffisante. M. Levi utilise en effet (page 680) cette propriété: Si pour un certain ensemble de valeurs de x de mesure nulle, les fonctions continues f et φ prennent des valeurs formant des ensembles de mesures nulles il en est de même de $f + \varphi$. Cette propriété est peut être exacte pour les fonctions que M. Levi considère, elle n'est pas vraie dans toute sa généralité. Soient en effet E_1 et E_2 deux ensembles bornés quelconques, je prend l'ensemble E des points du plan dont les abscisses appartiennent à E_1 et les ordonnées à E_2. Et je couvre un carré contenant E à l'aide de la courbe de M. Peano définie à l'aide d'un paramètre t variant de 0 à 1. J'écris une valeur de t, dans le système de numération à base 2, sous la forme

$$t = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots, \tag{1}$$

et je pose

$$\theta = 2\left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots\right). \tag{2}$$

Cela définit t en fonction de θ, quand θ appartient à un certain ensemble fermé Z, bien connu; j'achève la détermination en convenant que, dans un intervalle où il n'y a pas de points de Z, t reste constant. La fonction continue $t(\theta)$ permet de représenter les coordonnées des points de la courbe de M. Peano à l'aide de deux fonctions continues $x(\theta)$, $y(\theta)$ et à un ensemble de valeurs de θ de mesure nulle, convenablement choisi, correspondent les points de E. La proposition en litige est donc équivalente à la suivante: x étant une valeur quelconque de E_1, y une valeur quelconque de E_2, l'ensemble de toutes les valeurs de $x + y$ est de mesure nulle si E_1 et E_2 sont de mesures nulles.

Mais cette propriété, qui est bien celle que semble vouloir démontrer M. Levi (note 2 page 680), est inexacte. Prenons en effet E_1 et E_2 identiques à l'ensemble Z précédemment cité; je dis que l'ensemble des valeurs de $x + y$ est l'intervalle $(0, 1)$.

Soit z une valeur de $(0, 1)$, je l'écris dans le système de numération à base 3. J'obtiens x en changeant les chiffres 1 de rang impair, à partir de la virgule, en chiffres 0, les chiffres 1 de rang pair en chiffres 2 et en ne modifiant pas les autres chiffres. J'obtiens y en faisant les mêmes changements pour les chiffres 1 de z, en changeant les chiffres qui se trouvent entre un 1 de rang impair et le chiffre 1 immédiatement suivant en 2 et en remplaçant par des zéros les autres chiffres.

Il n'est peut être pas sans intérêt de remarquer, à l'occasion de l'énoncé de M. Levi, que lorsque, pour *tout* ensemble de mesure nulle, les valeurs correspondantes de deux fonctions f et φ forment des ensembles de mesures nulles $f + \varphi$ ne jouit pas nécessairement de la même propriété. Reprenons en effet l'ensemble E; supposons E_1 et E_2 identiques à Z, E est parfait. Les valeurs correspondantes de t forment un ensemble fermé. Les formules (1) et (2) font correspondre à cet ensemble e un ensemble fermé de *rivés, considéré là où il est fini, il faut et il suffit que $f(x)$ soit une intégrale indéfinie.*

La condition est nécessaire, c'est une tautologie; elle est suffisante, car j'ai montré qu'une intégrale indéfinie admettait pour dérivée la fonction intégrée partout, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, et de là résulte évidemment qu'une fonction intégrale indéfinie est l'intégrale indéfinie de sa dérivée, considérée là où elle existe et est finie, qu'elle est l'intégrale indéfinie de l'un quelconque de ses nombres dérivés considéré là où il est fini.

Or on peut reconnaître à un caractère très simple, que j'ai déjà indiqué [1], si une fonction est ou non une intégrale indéfinie.

Pour qu'une fonction f soit une intégrale indéfinie il faut et il suffit

---

valeurs de θ. Prenons pour $f(\theta)$ et $\varphi(\theta)$ des fonctions continues égales à $x(\theta)$ et $y(\theta)$ aux points de e et variant linéairement dans tout intervalle ne contenant pas de points de E. Les deux fonctions $f(\theta), \varphi(\theta)$ satisfont à la condition indiquée, leur somme n'y satisfait pas

M. Levi m'annonce qu'en tenant compte des propriétés particulières aux fonctions qu'il considère on peut compléter son raisonnement primitif; j'espère que sa démonstration sera publiée prochainement.

[1] A la page 129 de mes Leçons sur l'Intégration, je disais: « il existe des fonctions continues à variation bornée qui ne sont pas des intégrales indéfinies ». Et j'ajoutais en note: « Pour qu'une fonction soit intégrale indéfinie, il faut de plus que sa variation totale dans une infinité dénombrable d'intervalles de longueur totale l, tende vers zéro avec l

Si, dans l'énoncé de la page 94, on n'assujettit pas $f(x)$ à être bornée, ni $F(x)$ à être à nombres dérivés bornés, mais seulement à la condition précédente, on a une définition de l'intégrale équivalente à celle développée dans ce Chapître et applicable à toutes les fonctions sommables, bornées ou non ».

Voici l'énoncé de la page 94: « Une fonction bornée $f(x)$ est dite sommable, s'il existe une fonction à nombres dérivés bornés $F(x)$ telle que $F(x)$ admette $f(x)$ pour dérivée, sauf pour un ensemble de valeurs de x de mesure nulle. L'integrale dans (a, b) est alors, par définition, $F(b) - F(a)$ ».

Ces citations montrent que j'avais indiqué en 1904 le théorème avec tout la précision désirable mais d'ailleurs d'une façon assez incidente pour qu'il ait du échapper à la plupart de mes Lecteurs. Et en effet, M. Vitali a énoncé à nouveau et démontré cette propriété dans une note dont M. B. Levi a bien voulu me signaler l'existence (*Sulle funzioni integrali*, Atti della R. Accad. delle sc. di Torino, vol. 40, 1905). Une telle rencontre n'est pas étonnante; je me suis rencontré déjà avec M. Vitali à l'occasion de la mesure des ensembles (Lebesgue, Ann. di Mat., 1902; Vitali, Rend. del Circ. di Palermo, 1903); à l'occasion d'une condition d'integrabilité (Vit., Rend. Ist. Lomb., 1904; Leb., Leçon sur l'Int., 1904); à l'occasion d'un théorème sur les fonctions d'intégrale nulle cas particulier d'un de mes théorèmes sur la dérivation des intégrales indéfinies (Leb., Leçons sur l'Int. 1904; Vit., Rend. Palermo, 1905); à l'occasion d'un théorème sur les fonctions mesurables (Borel et Leb., C. R. 1903; Vit., Rend. Ist. di Lomb. 1905); à l'occasion d'un théorème sur les fonctions représentables analytiquement (Leb., C. R., 1904; Vit., Ces Rend., 1905). Ces rencontres montrent que les théorèmes en question sont assez naturels pour se présenter à l'esprit de tous ceux qui s'occupent de ces questions.

que, si l'on prend un ensemble d'intervalles non empiétant les uns sur les autres, situés dans l'intervalles fini (a, b) que l'on considère, et dont la somme des longueurs est l, la somme des valeurs de la variation totale dans ces intervalles tende uniformément vers zéro avec l.

La condition est nécessaire: en effet, supposons que f soit l'intégrale indéfinie de φ, la variation totale de f dans (α, β) est $\int_\alpha^\beta |\varphi| dx$. Par suite, la somme des variations totales de f dans les intervalles considérés est au plus $|M| l + I(M)$, $I(M)$ étant encore l'intégrale de $|\varphi|$ étendu à l'ensemble des points de (a, b) où $|\varphi|$ surpasse $|M|$. Donc cette somme de variation totale tend uniformément vers zéro avec l, car on peut prendre $I(M)$ aussi petit que l'on veut pourvu que $|M|$ soit assez grand.

La condition est suffisante: en effet, si elle est remplie, f étant à variation bornée a, sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle, une dérivée déterminée laquelle est sommable dans l'ensemble des points où elle existe et est finie ([1]). Soit Δ une fonction égale à cette dérivée là où elle existe et est finie et nulle ailleurs. Δ est sommable, je dis que son intégrale indéfinie est f. Je pose $\varphi = \int \Delta \, dx - f$. φ a une dérivée nulle sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle E et d'ailleurs φ possède la propriété que nous avons supposée appartenir à f, car cette propriété appartient à $\int \Delta \, dx$ et la variation totale d'une différence est au plus la somme des variations totales des deux termes. Je dis que φ est constante.

Enfermons E dans un ensemble A d'intervalles de longueur totale l. A chaque point x de (a, b) nous pouvons attacher un intervalle positif $(x, x+h)$ soumis à la condition d'être intérieur à A, si x appartient à E, et à la condition que

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < \varepsilon h \quad , \quad (\varepsilon < 0),$$

dans les autres cas. Couvrons (a, b) avec une chaîne formée de ces intervalles; $\varphi(b) - \varphi(a)$ est la somme des quantités analogues relatives aux intervalles de la chaîne. Ceux de ces intervalles dont l'origine appartient à E fournissent une contribution inférieure à la variation totale dans les intervalles A, donc aussi petit que l'on veut quisque l est arbitraire. Les autres fournissent une contribution au plus égale à $\varepsilon(b-a)$. ε est quelconque, la proposition est démontrée.

Dans l'énoncé précédent on peut remplacer « la somme des valeurs de la variation totale dans ces intervalles » par « la variation dans ces intervalles », en entendant par là la somme $\Sigma |f(\beta) - f(\alpha)|$ étendue à tous les intervalles (α, β) considérés. Cela résulte si l'on veut de la démonstration précédente ou encore du fait qu'en subdivisant un intervalle en intervalles

([1]) Leçons sur l'intégration, pages 128 et 129.

partiels et en prenant la variation pour ces intervalles partiels on approche autant que l'on veut de la variation totale dans l'intervalle divisé. Voici une autre transformation plus intéressante.

J'appelle variation de f dans un ensemble de mesure nulle E la plus petite [1] des limites vers lesquelles tendent les variations de f dans un système d'intervalles contenant E et de la mesure l, quand on fait tendre l vers zéro. Alors *pour qu'une fonction f soit une intégrale indéfinie il faut et il suffit que, dans tout ensemble de mesure nulle, elle ait une variation nulle et qu'elle soit à variation bornée.*

La condition est évidemment nécessaire; pour montrer qu'elle est suffisante je remarque que, si elle est remplie, f est continue et à variation bornée de sorte qu'on peut reprendre un raisonnement précédent; conversant les mêmes notations, je pose $\varphi = \int \Delta\, dx - f$; φ a une dérivée nulle sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle E. D'ailleurs dans E la variation de φ est nulle car c'est au plus la somme de la variation de f, et de la plus grande des limites des variations de $\int \Delta\, dx$ dans intervalles contenant E et de mesure totale tendant vers zéro; ces deux quantités à ajouter sont nulles.

J'enferme E dans des intervalles A choisis de manière que la variation v de φ dans A tende vers zéro avec la longueur totale des A. A chaque point x de (a, b) ne faisant pas partie de A j'attache un intervalle positif $(x, x+h)$ tel que

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leqq \varepsilon h \quad , \quad (\varepsilon > 0),$$

et que $(x+h)$ ne soit pas *intérieur* à un intervalle A.

En évaluant $\varphi(b) - \varphi(a)$ à l'aide d'une chaîne formée à l'aide de ces intervalles et des A, on trouve :

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leqq \varepsilon(b-a) + v;$$

φ est donc une constante [2].

Les énoncés qui précèdent fixent les cas où la fonction primitive s'obtient immédiatement comme intégrale indéfinie d'un de ses nombres dérivés. Lorsqu'il n'en est pas ainsi l'intégration peut encore parfois être utilement employé au passage d'un des nombres dérivés Δ à la fonction primitive f.

[1] Pour l'application qui suit la plus petite limite pourrait être remplacée par la plus grande, bien évidemment; mais ces deux limites ne sont pas toujours nécessairement égales.

[2] Il est facile de voir que les deux conditions de l'énoncé qui vient d'être légitimé sont indépendantes. Si l'on avait, dans cet énoncé, remplacé *variation* par *variation totale* la première condition eut suffi à elle seule; la variation totale dans E se définissant par un procédé analogue à celui qui a servi pour la variation.

Supposons, par exemple, que f remplisse les conditions des énoncés précédents dans tout intervalle n'ayant aucun point commun avec un ensemble fermé E. On sait, dans un tel intervalle, remonter de $\varDelta$ à f; on le sait donc aussi dans tout intervalle contigu à E ou dans tout intervalle où E est réductible. Supposons maintenant que la série $\Sigma|f(\beta)-f(\alpha)|$ étendue à tous les intervalles contigus à E soit convergente, connaissant $\varDelta$ nous savons former la fonction

$$\theta(x)=f(x)-f[\xi(x)]+\Sigma'[f(\beta)-f(\alpha)],$$

$\xi(x)$ étant le plus grand des nombres de E non supérieur à x et Σ' étant étendue à tous les intervalles (α,β) contigus à E pour lesquels on a $x\geq\beta>\alpha$.

La recherche de f est donc ramenée à celle de $f_1=f-\theta$, or il est facile de démontrer que les nombres dérivés de f_1 qui sont nuls en tout point n'appartenant pas à E, sont égaux à ceux de f en tous les points de E, sauf en ceux d'un ensemble exceptionnel de mesure nulle. On peut donc opérer à nouveau sur f_1 comme sur f (1).

En ce qui concerne les fonctions illimitées il est facile de donner des définitions de l'intégrale s'appliquant à des catégories plus étendues de fonctions et pouvant être utilisées dans la recherche des fonctions primitives. Par exemple, imitant une définition de de la Vallée Poussin (2), on peut définir l'intégrale par l'égalité

$$\int f\,dx=\lim_{M=\infty}\int f_M\,dx,$$

f_M désignant une fonction égale à f quand on a $|f|\leq M$, f_M est égale à M pour $f\geq M$ et à $-M$ pour $f\leq M$.

Si l'on adoptait cette définition (3) ou tout autre analogue, il faudrait faire de suite une révision minutieuse de toutes les propriétés de l'intégrale;

(1) On pourra comparer ces indications avec celles que je donnais dans ma Thèse (Intègrale, Longueur, Arie; Annali di Mat., 1902; Note du n. 34). Le procédé qui résulte de ces indications paraît trop compliqué pour pouvoir être souvent utilisé; cependant il peut être utile dans la théorie des séries trigonométriques. D'ailleurs il semble que ces deux applications: recherche d'une fonction connaissant un de ses nombres dérivés; recherche de la série trigonométrique représentant une fonction donnée, soient toujours intimement liées.

(2) Si l'on se rappelle que, pour passer de la définition de l'intégrale d'après Cauchy-Riemann à celle que j'ai donnée, il suffit de remplacer les divisions de l'intervalle de variation de la variable par des divisions de l'intervalle de variation de la fonction, la définition proposée dans le texte apparaîtra comme imitée de la définition, d'après Cauchy, de la valeur principale d'une intégrale.

(3) Pour avoir la définition que j'ai adoptée (Leçons sur l'Int. page 115) il faudrait ajouter cette condition que $\lim_{M=\infty}\int|f_M|\,dx$ existe.

on devrait se demander, par exemple, si, du fait que f a une intégrale dans (a, b), il résulte nécessairement que f en a une dans toute partie de (a, b) [1], si l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales, etc.

Pour les fonctions non toujours finies, les théorèmes précédents pourraient conduire à dire: On appelle intégrale d'une fonction f l'intégrale de cette fonction étendue à l'ensemble des points où elle finie. Mais, pour qu'une telle définition puisse être vraiment utile, il faut que f ne devienne infinie qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle, sans quoi l'intégrale de $f +$ constante ne serait pas l'intégrale de f et de la constante. Mais, si f n'est infinie qu'en un ensemble de points de mesure nulle, cette définition peut être avantageuse. L'intégrale ainsi définie pourra parfois se calculer à l'aide du théorème suivant, que j'énonce en conservant au mot intégrale le sens plus restreint que je lui ai toujours donné.

Si une suite non décroissante de fonctions u_i a pour fonction limite u; si u_i n'est infinie qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle E_i, si u n'est infinie qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle E, si enfin u_i a une intégrale dans l'ensemble des points n'appartenant pas à E_i, la suite des intégrales des u_i est convergente, ou divergente, suivant que u a, ou non, une intégrale dans l'ensemble des points n'appartenant pas à E; cette intégrale, quand elle existe, est la somme de la série.

En attribuant la valeur 0 à toutes les fonctions u_i et u aux points de l'ensemble de mesure nulle $E + E_1 + E_2 + \ldots$ on voit qu'il suffit de démontrer la propriété pour les fonctions partout finies. Or, qu'une série à termes positifs soit intégrable terme à terme, est précisément l'une des 6 conditions que j'ai imposées à priori à l'intégrale [2]. J'ai vérifié [3] que l'intégrale des fonctions bornées satisfaisait bien à ces six conditions, et j'ai affirmé [4] qu'il en était de même pour l'intégrale des fonctions non bornées. Ce qu'on justifiera très facilement en reprenant presque sans modification le raisonnement que j'ai utilisé pour les fonctions bornées [5].

[1] On pourra voir, par exemple, ce qui se passe pour la fonction $\frac{1}{x}$ quand on lui applique la définition précédente.

[2] Leçons, pages 98-99.

[3] Leçons, page 114.

[4] Leçons, page 115.

[5] M. B. Levi a développé ce raisonnement dans une Note *Sopra l'integrazione delle serie* (Rend. del. R. Ist. Lomb., serie II, vol. 39, 1906).