ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 gennaio 1907.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra l'estensione agli sviluppi assintotici di un teorema del sig. Hurwitz.* Nota del Socio S. Pincherle.

È noto come le serie di potenze, anche se divergenti, possano servire a rappresentare una funzione quando esse abbiano quella proprietà studiate dal Borel col nome di sommabilità esponenziale, o quando diano lo sviluppo assintotico della funzione nel senso del Poincaré; casi fra i quali, per altro, intercede uno stretto legame, come ho mostrato in altra occasione (1). Ma, mentre per gli sviluppi convergenti in serie di potenze la successione dei coefficienti racchiude in sè, per così dire, tutte le proprietà della funzione e permette in molti casi di metterne in evidenza le singolarità, come risulta da molte e svariate ricerche (2), non si hanno, ch'io sappia, proposizioni analoghe per gli sviluppi assintotici. La presente Nota dà appunto un legame fra la legge di formazione dei coefficienti in uno sviluppo assintotico, e la singolarità della funzione rappresentata, e credo perciò che possa presentare qualche interesse.

(1) Questi Rendiconti, 15 maggio 1904.

(2) Vedine il riassunto nell'opera di J. Hadamard, *La série de Taylor et le prolongement analytique*. Paris, C. Naud, 1901.

L'Hurwitz dava nel 1899 una proposizione ([1]), facente riscontro ad un noto teorema dell'Hadamard, dal quale risulta, almeno nel caso delle singolarità polari, « che se le serie

$$\alpha(x) = \sum \frac{a_n}{x^{n+1}} \quad , \quad \beta(x) = \sum \frac{b_n}{x^{n+1}} \, ,$$

« sono gli sviluppi nell'intorno di $x = \infty$ di due funzioni analitiche uni-« formi, singolari rispettivamente nei punti p_i e q_j, la serie

$$\sum \frac{c_n}{x^{n+1}} \quad , \quad c_n = a_0 b_n + n\, a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0$$

« rappresenta una funzione analitica regolare per $x = \infty$, le cui sole singo-« larità sono nei punti $p_i + q_j$ », teorema ch'io ho dimostrato poi in altro modo ed esteso alle singolarità più generali ([2]). Mi propongo qui di dimostrare il teorema per il caso in cui gli sviluppi (1) non siano più convergenti, ma rappresentino assintoticamente due funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$, ora non più regolari per $x = \infty$, le quali tendano a zero almeno del prim'ordine quando x tende all'infinito in tutte le direzioni del piano, una sola eccettuata che sia per esempio quella nel senso dell'asse reale negativo. Considererò per semplicità il caso speciale che tanto $\alpha(x)$ che $\beta(x)$ abbiano al finito un solo punto singolare, p per la prima e q per la seconda, ma l'estensione ad un caso più generale non presenterebbe difficoltà essenziale.

Poniamo $x = \xi + i\eta$, e sia θ un angolo compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Per le ipotesi fatte, è noto che $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ ammettono le funzioni generatrici rispettive $a(u)$, $b(u)$, tali che nel semi-piano i cui punti (ξ , η) verificano rispettivamente le condizioni

$$\xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta > \delta \quad , \quad \xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta > \delta'$$

le $\alpha(x)$, $\beta(x)$ sono espresse da

$$\alpha(x) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} e^{ux}\, a(u)\, du \quad , \quad \beta(x) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} e^{ux}\, b(u)\, du \, , \tag{1}$$

δ e δ' essendo determinati in modo che le rette di equazione

$$\xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta = \delta \quad , \quad \xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta = \delta' \tag{2}$$

passino rispettivamente per i punti p e q ([3]). Sotto condizioni note per le

([1]) Comptes rendus de l'Académie des sciences, 6 février 1899.
([2]) Questi Rendiconti, 5 marzo 1899 e 2 giugno 1906.
([3]) V. la mia Nota nei Rendiconti dell'Acc. di Bologna, 29 novembre 1903.

funzioni generatrici, le $\alpha(x)$, $\beta(x)$ avranno rispettivamente gli sviluppi assintotici

$$\alpha(x) \sim \sum \frac{a_\nu}{x^{\nu+1}} \quad , \quad \beta(x) \sim \sum \frac{b_\nu}{x^{\nu+1}} ,$$

dove a_ν, b_ν sono i valori, per $u = 0$, delle derivate ν^{sime} delle funzioni generatrici $a(u)$, $b(u)$. Formiamo ora l'espressione

$$(3) \qquad \int_0^{\infty e^{i\theta}} e^{ux} a(u)\, b(u)\, du :$$

questa, che è la funzione determinante del prodotto $a(u)$, $b(u)$, sarà notoriamente regolare sotto la condizione

$$(4) \qquad \xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta > \delta + \delta',$$

ed ammetterà lo sviluppo assintotico

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(a_0 b_\nu + \nu a_1 b_{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a_2 b_{\nu-2} + \cdots + a_\nu b_0 \right) \frac{1}{x^{\nu+1}}$$

quando x va all'infinito nel senso normale alle rette

$$\xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta = c$$

dalla parte di c crescente. Quanto precede vale per ogni valore di θ, eccettuati i valori estremi $\pm \frac{\pi}{2}$; onde, al variare di θ, le rette che limitano la convergenza dell'integrale (3) saranno della forma

$$(5) \qquad \xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta = \delta + \delta',$$

Ma, posto $p = \lambda + i\mu$, $q = \lambda' + i\mu'$, la prima delle (2) è soddisfatta dalle coordinate λ, μ e la seconda dalle coordinate λ', μ', onde la (5) sarà soddisfatta da $\lambda + \lambda'$, $\mu + \mu'$ cioè dalle coordinate del punto $p + q$, qualunque sia il valore di θ entro i limiti indicati. Per ciò le rette (5) inviluppano il punto $p + q$, che sarà pertanto [1], punto singolare per la funzione rappresentata da (3), e che ne sarà il solo.

[1] Nota citata.