

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 aprile 1907.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Intorno alle superficie iperellittiche.* Nota del Corrispondente F. ENRIQUES e di F. SEVERI.

1. Una superficie algebrica

$$F(x, y, z) = 0$$

si dice *iperellittica*, quando ammette una rappresentazione parametrica per mezzo di funzioni abeliane quadruplamente periodiche, di due parametri:

$$x = f_1(u, v) \quad y = f_2(u, v) \quad z = f_3(u, v).$$

Ad ogni punto (x, y, z) corrisponderanno in generale $r \geq 1$ coppie u, v incongrue rispetto ai periodi primitivi delle f_1, f_2, f_3 ; diremo in tal caso che F è una *superficie iperellittica di rango r* .

Le superficie razionali e le rigate ellittiche si possono considerare sia come degenerazioni di superficie iperellittiche di rango 1, sia come superficie iperellittiche di rango $r > 1$.

Ma, nel seguito, parlando di superficie iperellittiche, escluderemo sempre codeste due classi di superficie.

Come è noto, i periodi primitivi delle funzioni f_1, f_2, f_3 si possono ridurre alla *forma normale*

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{array},$$

ove δ è un intero positivo.

Quantunque questa riduzione si effettui (con sostituzioni lineari su u, v e sui periodi) in più modi diversi, l'intero positivo δ che qui figura, risulta sempre lo stesso; esso è un carattere del sistema delle funzioni f_1, f_2, f_3 . Lo diremo il *divisore* di queste funzioni, ed F si chiamerà una *superficie iperellittica di divisore δ* .

2. Le superficie iperellittiche di rango 1 (talvolta considerate esclusivamente sotto il nome di « superficie iperellittiche ») hanno formato oggetto di classici lavori per parte del sig. Picard e del sig. Humbert. Il primo di questi autori le ha studiate come superficie dotate di un gruppo permutabile ∞^2 di trasformazioni birazionali in se stesse; perciò appunto tali superficie hanno ricevuto il nome di *superficie di Picard*.

Le superficie di Picard corrispondenti a un divisore δ qualsiasi, si possono costruire geometricamente nel modo seguente:

Si consideri la *superficie di Jacobi* F che rappresenta le coppie di punti di una curva di genere 2; questa è la più generale superficie di Picard di divisore 1.

Ora F ammette un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè (trasformazioni di 2^a specie), fra cui vi è un numero finito di trasformazioni cicliche d'ordine δ . Ebbene, una trasformazione siffatta genera su F un'involuzione I_2 d'ordine δ ; una qualsiasi superficie F_δ , i cui punti corrispondano biunivocamente ai gruppi di I_2 , è una superficie di Picard di divisore δ .

Tale costruzione fornisce tutte le superficie di Picard di divisore qualsiasi, e conduce subito ad illustrarne le note proprietà, sotto l'aspetto geometrico.

Essa conduce anche a proprietà nuove, fra cui sembra particolarmente importante la seguente (che tuttavia esige una dimostrazione un po' delicata):

Sopra una superficie di Picard a moduli generali, di divisore δ , tutti i sistemi continui di curve si ottengono per moltiplicazione da un sistema continuo $\infty^{\delta+1} \{C_\delta\}$ di genere $\delta + 1$, e grado 2δ .

Ne segue in particolare che:

Una superficie di Picard di divisore $\delta > 3$, può trasformarsi in una superficie d'ordine 2δ senza curve eccezionali, ma non in una superficie senza curve eccezionali d'ordine $< 2\delta$.

Per $\delta = 3, 2$ si hanno superficie di Picard, senza curve eccezionali, d'ordine minimo 24 e 16 rispettivamente; per $\delta = 1$ l'ordine minimo di una superficie di Jacobi a moduli generali e senza curve eccezionali è 18, perchè la superficie d'ordine 8 le cui sezioni piane appartengono ad un sistema $|2C_1|$, si riduce ad una superficie del 4° ordine (di Kummer) contata due volte.

Le condizioni affinchè una superficie sia iperellittica di rango 1, sono state date da un teorema del sig. Picard. Uno di noi (Enriques) ha fatto vedere ch'esse possono tradursi come segue:

Affinchè una superficie sia iperellittica di rango 1, occorre e basta che i suoi generi (il genere numerico p_a , il genere geometrico p_g e il quadrigenero P_4) abbiano i valori

$$p_a = -1 \quad p_g = P_4 = 1.$$

Riesce quindi interessante riconoscere che tali condizioni determinano infinite famiglie di superficie, dipendenti da un intero arbitrario (il divisore δ) e da tre parametri (moduli).

3. Lo studio delle superficie iperellittiche di rango $r > 1$, si riattacca a quello delle superficie di Picard, o in particolare delle superficie di Jacobi, mercè l'osservazione seguente:

Ogni superficie iperellittica di rango r e divisore δ corrisponde ad una involuzione d'ordine r sopra una superficie di Picard F_δ , e quindi ad una involuzione d'ordine $r\delta$ sopra una superficie di Jacobi.

Consideriamo l'involuzione I_r su F_δ che corrisponde ad una superficie iperellittica di rango r . Sussistono le due proprietà seguenti:

1) la I_r ha un numero finito (≥ 0) di coincidenze, se (come si è avvertito) si escludono dal novero delle superficie iperellittiche le superficie razionali e le rigate ellittiche;

2) la I_r non è composta coi gruppi di una involuzione I_d , generata da una trasformazione ciclica di 2^a specie di F_δ .

Orbene, da queste proprietà si trae che « l'involuzione I_r è generata da r trasformazioni birazionali della F_δ in se stessa, costituenti un gruppo finito d'ordine r ».

Si ha dunque il *teorema fondamentale*:

Ogni superficie iperellittica di rango $r > 1$ e divisore δ , corrisponde ad una involuzione generata da un gruppo di r trasformazioni birazionali sopra una superficie di Picard F_δ .

Cioè:

Sia $F(xy z) = 0$ una superficie iperellittica, ed essendo x, y, z funzioni abeliane di due parametri u, v , accada che ad ogni gruppo di valori di x, y, z , corrispondano r coppie (u, v) incongrue rispetto ai periodi primitivi di queste funzioni:

$$(u_1, v_1) \quad (u_2, v_2) \quad \dots \quad (u_r, v_r);$$

allora tali coppie saranno legate da $r-1$ sostituzioni lineari

$$\begin{cases} u_i = a_i u_1 + b_i v_1 \\ v_i = c_i u_1 + d_i v_1 \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, r),$$

a coefficienti indipendenti da $(xy z)$.

Queste sostituzioni formano gruppo insieme alla sostituzione identica, e

le costanti a_i, b_i, c_i, d_i si possono esprimere mediante combinazioni lineari a coefficienti interi dei periodi.

La dimostrazione di questo teorema fondamentale è assai delicata, soprattutto perchè non si può escludere a priori che l'involuzione I_r posseda dei punti fondamentali appartenenti ad ∞^1 gruppi dell'involuzione. Indicheremo qui le grandi linee del procedimento dimostrativo che abbiamo seguito, e a tale scopo potremo riferirci al caso più semplice in cui la I_r è data sopra una superficie di Jacobi F .

Consideriamo su questa un sistema $\{C\} = \{C\}$ costituito da ∞^2 curve di genere due senza punti doppi, e costruiamo la curva K coniugata ad una generica C rispetto ad I_r , cioè il luogo dei gruppi di $r-1$ punti coniugati ai punti di C .

La dimostrazione del nostro teorema fondamentale si riconduce a stabilire che la K si compone di $r-1$ curve birazionalmente identiche a C . A priori invece si potrebbe supporre K irriducibile, o spezzata in meno di $r-1$ componenti.

Limitiamoci all'ipotesi che K sia irriducibile, ed indichiamo la via che da codesta ipotesi fa scaturire un assurdo, in relazione alle proprietà 1) 2) di I_r .

Se il sistema $\{K\}$ che viene descritto dalla curva K mentre C descrive $\{C\}$, è costituito da curve generalmente irriducibili, si possono fare due supposizioni:

a) questo sistema è trasformato in se medesimo dalle ∞^2 trasformazioni di 2^a specie di F ;

b) esiste un sistema $\{\bar{K}\}$, più ampio di $\{K\}$, che contiene infinite curve birazionalmente identiche ad ogni K .

Ma la supposizione a) conduce a contraddire la proprietà 2), che innanzi abbiamo detto valere per I_r .

La supposizione b) porta a questo, che esiste una serie continua di curve $\bar{K}$ avente per limite una K . Costruiamo la curva coniugata ad una generica $\bar{K}$ della serie, rispetto ad I_r ; sia L questa curva. Mentre $\bar{K}$ tende a K , L deve tendere alla curva $C + (r-2)K$. Ora mediante considerazioni di *Analysis situs*, si deduce di qui che L non può essere una curva irriducibile (cioè una superficie di Riemann *connessa*), perchè altrimenti qualcuno dei punti comuni a C, K , risulterebbe un punto di coincidenza di I_r , mentre (per la proprietà 1)) una C generica non contiene di tali punti. Un esame più approfondito mostra che L deve spezzarsi precisamente in una C ed in un'altra curva; ma allora $\bar{K}$ deve essere curva coniugata di una C , cioè appartenere a $\{K\}$, e si ricade nell'ipotesi a).

4. Il teorema fondamentale sopra espresso permette virtualmente di determinare tutte le famiglie birazionalmente distinte di superficie iperellittiche di rango $r > 1$. Queste superficie possono essere regolari o irregolari.

Le superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$ sono superficie ellittiche, e, come facilmente si prova, contengono, oltrechè un fascio razionale di curve ellittiche, anche un fascio ellittico di curve parimente ellittiche.

Il rango delle superficie iperellittiche predette può valere $r = 2, 3, 4, 6$, giacchè esse si presentano come immagini di involuzioni cicliche d'ordine 2, 3, 4, 6. Si ottengono i tipi più semplici partendo da una superficie di Jacobi con due fasci di curve ellittiche unisecantisi ⁽¹⁾ o dalla superficie di Jacobi che corrisponde ad una curva di genere 2 possedente un'involuzione singolare di 2° ordine.

A proposito delle superficie ellittiche contenenti due fasci di curve ellittiche si noti che esse si possono classificare, secondo i risultati di Enriques ⁽²⁾, in 4 famiglie alle quali appartengono appunto i 4 tipi suindicati.

I plurigeneri di codeste famiglie, secondo le formule di Enriques (§§ 8, 9) sono rispettivamente:

- 1) $p_a = -1, p_g = 0, P_2 = P_6 = 1$
- 2) $p_a = -1, p_g = P_8 = 0, P_3 = 1$
- 3) $p_a = -1, p_g = P_6 = P_{10} = 0, P_4 = 1$
- 4) $p_a = -1, p_g = P_4 = P_{14} = 0, P_6 = 1$.

Questi valori dei plurigeneri caratterizzano le superficie ellittiche possedenti due fasci di curve ellittiche.

Infatti, se una superficie ellittica contiene, accanto ad un fascio razionale di curve ellittiche, un fascio ellittico di curve di *genere maggiore d'uno*, si possono presentare 4 casi, corrispondentemente ai quali i generi hanno i valori indicati per le 4 famiglie suddette, eccezione fatta pei generi P_6, P_8, P_{10}, P_{14} che hanno valori > 1 . Come si possa dedurre di qui un modo di *definire mediante caratteri le superficie iperellittiche irregolari*, è una questione su cui ci proponiamo di ritornare in un'altra Nota.

5. Le superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$ (superficie ellittiche) dipendono per la prima famiglia da 2 moduli e per le altre da un modulo. Esse sono dunque superficie iperellittiche a *moduli particolari*. Questo fatto rientra d'altronde nel seguente teorema, che consegue immediatamente dal teorema fondamentale del n. 3:

⁽¹⁾ La possibilità di uno di questi tipi, e precisamente di quello che corrisponde al gruppo generato da una sostituzione del tipo
$$\begin{cases} u' = u + \frac{1}{3} \\ v' = e^{\frac{2\pi i}{3}} v \end{cases}$$
, ci fu annunciata dai signori Bagnera e De Franchis prima che la nostra analisi si volgesse alle superficie iperellittiche irregolari.

⁽²⁾ *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1905).

Le superficie iperellittiche di rango $r > 1$ a moduli generali, sono superficie regolari di rango 2, e di generi $p_a = p_g = P_2 = \dots = 1$.

Esse corrispondono alle involuzioni generate sopra superficie di Picard, da trasformazioni di 1^a specie:

$$u + u' = \text{cost}, \quad v + v' = \text{cost}.$$

È facile costruire i modelli di tali superficie per un divisore δ qualsiasi.

Si ottengono superficie di ordine 4δ in uno spazio $S_{2\delta+1}$, dotate di 16 punti doppi conici e di 16 iperpiani tangenti lungo curve razionali normali d'ordine 2δ , formanti una ben definita configurazione. Per $\delta = 1$ si ha, com'è noto, la superficie di Kummer; per $\delta = 2, 3$ si ottengono superficie di cui recentemente i sig.¹ Traynard e Remy hanno considerato le proiezioni nello spazio ordinario, in varie note pubblicate nei Comptes Rendus dal 1904 in poi.

6. Si tratta ora di determinare le superficie iperellittiche regolari di rango $r > 2$, le quali esistono soltanto per particolari valori dei moduli. Perciò occorre stabilire una completa classificazione delle superficie di Picard che ammettono trasformazioni birazionali (*singolari*) in se stesse all'infuori di quelle *ordinarie* di 1^a e 2^a specie, e classificare inoltre le diverse involuzioni che possono ottenersi sopra una medesima superficie di Picard, in corrispondenza a gruppi isomorfi di trasformazioni.

Una superficie di Picard può ammettere due specie diverse di trasformazioni singolari: *trasformazioni principali* o di Hermite e *trasformazioni di Humbert*. (Humbert riserva a queste soltanto il nome di « trasformazioni singolari »).

Riferiamoci, per semplicità di discorso, al caso delle superficie di Jacobi, essendo facile passare di qua al caso del divisore $\delta > 1$. Le trasformazioni di Hermite sono quelle che nascono da una *trasformazione birazionale della curva di genere due*, di cui la superficie di Jacobi rappresenta le coppie.

Si possono avere superficie iperellittiche di rango $r > 2$ corrispondenti ad involuzioni generate sopra una superficie di Jacobi (o di Picard) da gruppi di Hermite o da gruppi di Humbert. I due casi si distinguono come segue: le superficie iperellittiche corrispondenti ai gruppi di Hermite ammettono una rappresentazione parametrica PROPRIA per mezzo di funzioni Θ ; cioè una rappresentazione

$$(1) \quad qx_i = \Theta_i(uv) \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

tale che le equazioni (1) per valori dati delle coordinate omogenee x_i di un punto variabile sopra una di queste superficie, hanno in comune un numero finito di soluzioni (uv) incongrue rispetto ai periodi.

All'opposto le superficie provenienti da gruppi di Humbert ammettono *rappresentazioni improprie* per mezzo delle Θ ; cioè le equazioni (1) relative a queste superficie, hanno in comune infinite soluzioni fisse e un numero finito di soluzioni variabili colle x_i .

Una rappresentazione parametrica propria per una superficie iperellittica corrispondente ad un gruppo di Humbert, si ottiene mediante funzioni intermedie.

Ciò posto, noi ci proponiamo di classificare le superficie iperellittiche di rango $r > 2$, che ammettono una rappresentazione parametrica propria mediante funzioni Θ . Ci riferiremo per semplicità al caso $d = 1$. Abbiamo dunque da considerare le superficie di Jacobi, che ammettono trasformazioni singolari principali in sè stesse. Ed occorre distinguere due casi: quello di una superficie di Jacobi corrispondente ad una curva di genere due irriducibile, ed il caso particolare della superficie con due fasci di curve ellittiche unisecantisi.

Ci limiteremo in questa Nota al 1° caso, rimandando la trattazione del 2° caso ad una ulteriore comunicazione.

Le superficie di Jacobi che ammettono trasformazioni singolari principali in sè stesse, risultano note dall'analisi di Bolza delle curve di genere due con trasformazioni in sè (¹). Ma alcuni fra i gruppi di Bolza conducono a superficie razionali o a rigate ellittiche, anzichè a vere superficie iperellittiche.

Sia data una superficie di Jacobi F che ammetta un gruppo di trasformazioni d'Hermite G_r d'ordine r , generante una involuzione I_r , e (in corrispondenza all'ipotesi che I_r sia di divisore 1) si supponga che G_r non contenga alcuna trasformazione ciclica di 2ª specie.

Si può costruire una superficie Φ immagine di I_r , col procedimento che segue:

Si consideri sopra F un sistema $\infty^2 \{C\}$ ($= \{C_i\}$) di curve di genere due senza punti doppi ($n. 2$); le trasformazioni hermitiane di G_r mutano questo sistema in sè stesso, facendo corrispondere ad una curva generica C le curve $C', C'', \dots, C^{(r-1)}$ del medesimo sistema. Ebbene le curve

$$C + C' + C'' + \dots + C^{(r-1)}$$

sono contenute tutte in un sistema lineare di grado $2r^2$ appartenente all'involuzione I_r . Quindi la superficie immagine di I_r contiene un sistema lineare di grado $2r$, di genere $r + 1$ e di dimensione pure $r + 1$.

Si può supporre che il suddetto sistema lineare (che è semplice) venga segato su Φ dagli iperpiani di un S_{r+1} , e si ha allora una superficie Φ_{2r} d'ordine $2r$, a sezioni iperpiane di genere $r + 1$ in S_{r+1} .

(¹) Bolza, *On binary sextics with linear transformations into themselves* (American Journal of Mathematics, t. X, 1888).

Questa non è la superficie d'ordine minimo fra le immagini proiettive dell'involuzione I_r , ma si distingue per la circostanza di possedere un certo numero di punti doppi e d'iperpiani tangenti che formano una *configurazione massimamente simmetrica*.

Si ottengono punti doppi di Φ_{2r} in corrispondenza ai punti uniti delle trasformazioni di G_r su F , e iperpiani tangenti più volte lungo curve razionali, in corrispondenza alle curve C di $\{C\}$ unite per le suddette trasformazioni.

Si ottengono inoltre *gruppi di omografie che mutano in sé la Φ_{2r}* , in corrispondenza alle trasformazioni di 1^a e di 2^a specie che mutano in sé il gruppo dei punti uniti esistente sulla superficie F .

In tal modo si perviene ai seguenti risultati:

Le superficie iperellittiche regolari di rango $r > 1$ e divisore 1, le quali ammettono una rappresentazione propria mediante funzioni Θ non riducibili a prodotti di Θ dipendenti da una sola variabile ⁽¹⁾, sono superficie coi generi 1, le quali possono ricondursi birazionalmente ai seguenti tipi:

- 1) $r = 2$: superficie Φ_4 di Kummer;
- 2) $r = 3$: superficie Φ_6 di ordine 6 in S_4 , dotata di 9 punti biplanari ordinari e 9 iperpiani tangenti ciascuno lungo una conica contata tre volte. Le proprietà della configurazione costituita dai 9 punti e dalle 9 coniche, vengono espresse in modo completo da un simbolismo analogo a quello adottato da Humbert pei 16 punti e pei 16 piani singolari della superficie di Kummer.

Precisamente: indicati i punti coi simboli $(\alpha\alpha')$ e le coniche coi simboli $\alpha\alpha'$ ($\alpha, \alpha' = 1, 2, 3$) si ha che:

Pel punto biplanare $(\alpha\alpha')$ passano le coniche $\alpha\beta', \alpha\gamma', \alpha'\beta, \alpha'\gamma$.		Sulla conica $\alpha\alpha'$ giacciono i punti $(\alpha\beta') (\alpha\gamma') (\alpha'\beta) (\alpha'\gamma)$.
--	--	---

Delle 4 coniche per un punto doppio due toccano un piano tangente e due l'altro. Per due punti doppi possono passare due coniche o una sola, e due coniche possono avere comuni due punti doppi o uno solo.

La Φ_6 ammette un gruppo di 18 omografie: 9 involutorie e 9 cicliche di 3° ordine (compresa l'identità). Queste ultime formano un sottogruppo; ecc.

La Φ_6 è intersezione completa di una quadrica e di una varietà cubica. Anzi i 9 punti biplanari di Φ_6 son doppi per un fascio di varietà cubiche, tra le quali ve n'ha una con un 10° punto doppio. La cfig. dei 9 punti biplanari e delle 9 coniche, viene così a riconnettersi ad una cfig. già studiata da Segre e da Castelnuovo. Tutto ciò permette di scrivere le equazioni algebriche della superficie Φ_6 .

⁽¹⁾ Con ciò si vengono ad escludere le superficie provenienti dalla particolare superficie di Jacobi con 2 fasci ellittici unisecantisi. Esamineremo in appresso tali superficie.

3) $r=4$: superficie Φ_8 di ordine 8 in S_5 , con 10 punti doppi, di cui 4 biplanari e 6 conici; ogni punto biplanare ha infinitamente vicino un altro punto doppio.

Alla cfig. dei 10 punti doppi, è legata una cfig. di 10 curve razionali, e cioè di 4 coniche e di 6 quartiche; lungo le coniche si hanno iperpiani con contatto di 3° ordine, lungo le quartiche iperpiani con contatto di 1° ordine.

Per brevità, ora e nel seguito, tralascieremo di enunciare le relazioni di appartenenza tra gli elementi della cfig.

4) $r=6$: superficie Φ_{12} d'ordine 12 di S_7 , con dieci punti doppi: 1 punto biplanare singolare, 4 punti biplanari ordinari, 5 punti conici. Al punto biplanare singolare sono infinitamente vicini due punti doppi, l'uno nell'intorno di 1° ordine e l'altro nell'intorno di 2° ordine. Alla cfig. dei punti doppi è legata una cfig. di 10 curve razionali, e cioè: 1 conica, 4 quartiche e 5 sestiche; lungo cui si hanno rispettivamente iperpiani con contatti di 5°, 2°, 1° ordine; ecc. ecc.

(Questi quattro tipi di superficie corrispondono a gruppi ciclici di Hermite sopra una superficie di Jacobi).

5) $r=8$: tre tipi distinti di superficie Φ corrispondenti ad involuzioni generate sopra una superficie di Jacobi, da un gruppo di trasformazioni in isomorfismo [1, 2] col gruppo diedrico:

a) superficie Φ_{16} di ordine 16 dello spazio S_9 , con 7 punti doppi: 4 punti uniplanari ordinari e tre punti conici.

Sulla Φ_{16} esiste una cfig. di 7 curve razionali: 6 quartiche e 1 curva dell'8° ordine, lungo le quali si hanno iperpiani con contatti di 3° e di 1° ordine.

In questo caso e nel successivo, a differenza dei precedenti, le proprietà della cfig., formata dai punti, non si associano per dualità alle proprietà della cfig. formata dalle curve.

b) Superficie Φ_{16} d'ordine 16 dello spazio S_9 con sette punti doppi e sette curve razionali; e cioè: 6 punti biplanari e 1 punto conico; 4 coniche e 3 curve dell'8° ordine.

Ognuno dei punti biplanari ha infinitamente vicino un punto doppio.

c) Superficie Φ_{16} d'ordine 16 dello spazio S_9 , con 7 punti doppi e 7 curve razionali.

Dei punti doppi 6 sono biplanari con un punto doppio infinitamente vicino, il rimanente è conico. Delle curve 6 sono quartiche e la rimanente è dell'8° ordine. Le proprietà delle due cfig. di punti e di curve, si possono in tal caso associare secondo una certa legge di dualità.

6) $r=24$: tre tipi distinti di superficie Φ corrispondenti ad involuzioni generate sopra una superficie di Jacobi da un gruppo di trasformazioni in isomorfismo [1, 2] col gruppo tetraedrico:

a) Superficie Φ_{48} d'ordine 48 dello spazio S_{25} , con 7 punti doppi e 7 curve razionali. Dei punti doppi uno è un punto uniplanare singolare (che ha un punto doppio infinitamente vicino in ciascuno degl'intorni di 1° , 2° , 3° ordine), uno è un punto uniplanare ordinario, 4 son punti biplanari ordinari e 1 è conico. Delle curve razionali 1 è dell' 8° ordine, 2 del 12° e 4 del 16° ordine. Lungo queste curve si hanno iperpiani con contatti di 5° , 3° , 2° ordine.

b) Superficie Φ_{48} d'ordine 48 dello spazio S_{25} con 7 punti doppi e 7 curve razionali; e cioè: un punto biplanare avente 1 punto doppio infinitamente vicino in ciascuno degli intorni di 1° e di 2° ordine, due punti biplanari ognuno dei quali ha 1 sol punto doppio infinitamente vicino, 4 punti biplanari ordinari; quanto alle curve: 1 conica, 1 sestica, 4 curve di 16° ordine ed 1 di 24° ; ecc. ecc.

c) Superficie Φ_{48} dello S_{25} con 7 punti doppi e 7 curve razionali. Dei punti doppi 1 è un punto biplanare singolare con due punti doppi successivi, due son punti biplanari singolari con un sol punto doppio successivo e gli altri 4 son punti biplanari ordinari. Delle 7 curve 1 è dell' 8° ordine, 2 del 12° e 4 del 16° ordine.

Tutte queste superficie si possono rappresentare (per proiezione) su piani doppi $\{s^2 = f_6(xy)\}$ con sestica di diramazione.

7. La configurazione dei punti doppi e degli iperpiani tangenti ad una Φ_{2r} vale a caratterizzare le superficie iperellittiche regolari di rango r .

Infatti data una Φ_{2r} che possenga la suddetta cfg. di punti e curve singolari, si riesce a costruire una superficie multipla di generi $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ rappresentata sulla Φ_{2r} contata r volte, la quale risulta (in questo caso) una superficie di Jacobi.

Si ottiene codesta costruzione per la superficie di Kummer

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0,$$

considerando 4 piani tangenti lungo coniche, che costituiscano un tetraedro di Rosenhain; se questi piani sono

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0,$$

basta considerare la superficie dello spazio $S_4(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$

$$f = 0, \quad x_1 x_5 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

Per la superficie Φ_6 di S_4 si procede analogamente considerando 3 iperpiani $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ tangenti ad essa lungo coniche e comprendenti nel loro insieme i 9 punti biplanari. Basta quindi costruire la superficie rappresentata sulla Φ_6 contata 3 volte per mezzo del radicale

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}; \quad \text{ecc.}$$

8. Si possono pure assegnare in modo esplicito le sostituzioni lineari su u, v rappresentanti le trasformazioni birazionali che generano sulla superficie di Jacobi l'involuzione I_7 , immagine di una superficie Φ_{27} .

Una volta conosciute tali sostituzioni lineari, si costruisce la *rappresentazione parametrica di ciascuna di queste superficie mediante funzioni Θ* .

Così p. e. la involuzione I_3 corrispondente al tipo 2° (superficie Φ_6 di S_4), è generata dalla sostituzione lineare ciclica del 3° ordine

$$(2) \quad \begin{cases} u' = -\frac{1}{2}u - 3g v \\ v' = -3g' u - \frac{1}{2}v, \end{cases}$$

relativa alla superficie di Jacobi coi periodi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & g \\ 0 & 1 & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(g g' = -\frac{1}{12} \right).$$

Una sezione iperpiana della superficie Φ_6 può rappresentarsi annullando una funzione $\Theta(u, v)$ di 3° ordine; ma non già una funzione di 3° ordine arbitraria, sibbene una che sia trasformata in sé, a meno di un esponente, dalla sostituzione lineare (2). Scegliendo quindi cinque funzioni Θ di 3° ordine siffatte, tra di loro indipendenti, le coordinate omogenee di un punto di Φ_6 si possono assumere proporzionali a queste Θ , e in tal modo si ottiene la rappresentazione parametrica di Φ_6 .

Le 9 coniche della superficie Φ_6 hanno per equazioni

$$\mathcal{J}\left(u - \frac{\lambda}{3}, v - \frac{\mu}{3}\right) = 0 \quad (\lambda, \mu = 0, 1, 2),$$

ove $\mathcal{J}(u, v)$ è la funzione theta normale di 1° ordine a caratteristica nulla (una delle 16 $\mathcal{J}$ di Rosenhain).

Quanto ai punti doppi di Φ_6 , essi si ottengono in corrispondenza alle seguenti coppie di valori di u, v :

$$(0, 0) \left(0, \frac{1}{3}\right) \left(0, \frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}, 0\right) \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}, 0\right) \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Da ciò si deduce nuovamente il simbolismo già introdotto per esprimere le proprietà della cfig. di punti e coniche, esistente sulla superficie Φ_6 (n. 6).