ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Corollari del teorema relativo al paragone fra due triangoli geodetici di uguali lati.* Nota del Corrispondente P. Pizzetti.

1. Date due superficie, o porzioni di superficie, $S_1 S_2$, diremo per brevità di espressione che la curvatura (k) assoluta della S_1 è *generalmente maggiore* di quella (K) di S_2, quando la k sia, in ogni punto della S_1, *maggiore* o almeno *non minore* del *massimo* valore che assume la K in un punto qualsiasi della S_2 (escludiamo, naturalmente, il caso che le curvature delle due superficie siano costanti ed eguali fra loro).

Ho dimostrato in questi Rendiconti (seduta del 6 gennaio di quest'anno) che, in tale ipotesi, considerati due triangoli geodetici di eguali lati T_1, T_2, sulle S_1, S_2 rispettivamente, gli angoli di T_1 risultano maggiori dei corrispondenti di T_2. Deduco qui da questo teorema talune conseguenze relative al paragone di triangoli aventi in comune non già le lunghezze dei tre lati, ma bensì due lati e un angolo oppure un lato e due angoli, ed applico poi i risultati alla questione dell'*angolo di parallelismo* sopra una superficie qualunque a curvatura negativa.

Poniamo dapprima che la superficie S_1 sia a curvatura costante, uguale o maggiore della massima curvatura di S_2. Se quella curvatura è positiva, assumendola uguale all'*unità*, varranno pel triangolo geodetico sulla S_1 le relazioni differenziali

$$(1)\qquad da = \cos \mathrm{C} \,.\, db + \cos \mathrm{B} \,.\, dc + \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} \mathrm{C} \,.\, d\mathrm{A}$$
$$(2)\qquad \operatorname{sen} a \,.\, d\mathrm{B} = \operatorname{sen} \mathrm{C} \,.\, db - \operatorname{sen} \mathrm{B} \,.\, \cos a \,.\, dc - \operatorname{sen} b \,.\, \cos \mathrm{C} \,.\, d\mathrm{A}$$
$$(3)\qquad \operatorname{sen} \mathrm{B} \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, dc = d\mathrm{C} + \cos a \,.\, d\mathrm{B} + \cos b \,.\, d\mathrm{A}\,.$$

Pel caso di una superficie S_1 a curvatura costante negativa $= -1$, varranno invece le:

$$(1')\qquad da = \cos \mathrm{C} \,.\, db + \cos \mathrm{B} \,.\, dc + \operatorname{sen\,ip} b \,.\, \operatorname{sen} \mathrm{C} \,.\, d\mathrm{A}$$
$$(2')\qquad \operatorname{sen\,ip} a \,.\, dB = \operatorname{sen} \mathrm{C} \,.\, db - \operatorname{sen} \mathrm{B} \,.\, \cos \operatorname{ip} a \,.\, dc - \operatorname{sen\,ip} b \,.\, \cos \mathrm{C} \,.\, d\mathrm{A}$$
$$(3')\qquad \operatorname{sen} \mathrm{B} \,.\, \operatorname{sen\,ip} a \,.\, dc = - d\mathrm{C} - \cos \operatorname{ip} a \,.\, d\mathrm{B} - \cos \operatorname{ip} b \,.\, dA\,.$$

Nel caso di superficie a curvatura positiva, si intendono, in quel che segue, limitati i lati a una lunghezza non maggiore di $\pi : 2\sqrt{k_1}$ dove k_1 è il massimo della curvatura assoluta; pel caso di superficie a curvatura negativa nessuna limitazione di lunghezza è necessaria.

In ogni caso la somma di due angoli non potrà superare π. Questo è ben noto pel caso di superficie a curvatura negativa. Per quelle a curvatura costante positiva la formula

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B + C) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos \frac{1}{2}(b + c)}$$

mostra che $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(B + C)$ deve essere sempre positiva quando la lunghezza dei lati sia limitata come si è detto.

Paragone di due triangoli aventi uguali due coppie di lati, e gli angoli compresi.

2. Consideriamo sulla superficie $S_1 S_2$ i due triangoli $T_1(A_1 B_1 C_1)$ e $T_2(A_2 B_2 C_2)$ i quali abbiano i lati omonimi di egual lunghezza. La formola (1), oppure la (1'), dimostra che se, tenute fisse le lunghezze b e c si fa diminuire l'angolo compreso A, il 3° lato a diminuisce. Quanto agli altri due angoli, la formola (4) e l'altra

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B - C) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b - c)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b + c)},$$

supposto $b > c$, dimostrano che i due angoli $B + C$, $B - C$ crescono al diminuire di A, se b e c restano invariati. Dunque il più grande (B) dei due angoli B e C deve crescere al diminuire di A. Quanto all'altro, C, la formola

$$\operatorname{sen} a \,.\, dC = - \cos B \operatorname{sen} c \,.\, dA,$$

(che si deduce dalla (2) ponendovi $db = dc = 0$ e scambiando poi fra loro le lettere b e c) dimostra che anche C deve crescere al diminuire di A, ogni qualvolta l'angolo B si sia, col suddetto accrescimento, conservato minore di un angolo retto.

Applichiamo queste osservazioni al triangolo T_1 nel quale faremo diminuire l'angolo A_1 fino a che esso si riduca uguale all'angolo corrispondente di T_2, e terremo invariati i lati adiacenti $A_1 B_1$, $A_1 C_1$. Osservando che gli angoli B_1 e C_1 di T_1 sono già maggiori di quelli corrisp. di T_2 potremo dire che: *se sulle due superficie* $S_1 S_2$, *definite nel numero precedente, consideriamo due triangoli geodetici* T_1', T_2 *aventi due lati* (b, c) *eguali a due lati e gli angoli compresi* (A) *pure eguali, il terzo lato* (a) *di* T_1' *sarà minore del corrispondente di* T_2, *e il più grande* (B) *degli altri due angoli in* T_1' *sarà maggiore del corrispondente di* T_2. *Quanto al 3° angolo* (C) *esso sarà pur maggiore del corrispondente di* T_2, *se l'angolo precedentemente nominato* (B) *di* T_1' *è minore di un retto.*

Paragone di due triangoli aventi un lato uguale ad un lato e le coppie di angoli adiacenti uguali.

3. Assunti, come sopra, i due triangoli di uguali lati T_1, T_2 sulle due superficie, facciamo diminuire gli angoli A_1, B_1 di T_1 fino a ridurli uguali ai corrispondenti di T_2, e teniamo invariato il lato c. Per la formola (3) l'angolo C crescerà, e per le formole

$$(5) \qquad \begin{aligned} \operatorname{sen} a \,.\, dB &= \operatorname{sen} C \,.\, db - \cos C \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, dA \\ \operatorname{sen} b \,.\, dA &= \operatorname{sen} C \,.\, da - \cos C \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, dB \end{aligned}$$

la prima delle quali è ottenuta dalla (2) ponendovi $dc = 0$, e la seconda dalla (5) collo scambio delle lettere a e b, diminuiranno i lati a e b se, col detto accrescimento, l'angolo C si mantiene minore di un retto. Dunque: *se sulle superficie* S_1, S_2, *definite c. s., si considerano due triangoli geodetici* T_1', T_2 *aventi due coppie di angoli uguali e i lati compresi pure uguali, il 3° angolo di* T_1' *sarà maggiore del corrispondente in* T_2; *e, se questo 3° angolo di* T_1' *è minore di un retto, gli altri due lati di* T_1' *risulteranno minori dei corrispondenti del 2°.*

In questo numero e nel precedente abbiamo sempre applicate alla superficie S_1, le formole spettanti alle superficie a curvatura positiva. Le formole analoghe pel caso della curvatura negativa conducono agli stessi risultati quando la S_1 sia a curvatura costante negativa.

4. Pel paragone di due triangoli geodetici descritti sopra due superficie S_1, S_2 la prima delle quali abbia la curvatura comunque variabile, e la seconda abbia la curvatura costante, uguale o minore della minima curvatura di S_1, valgono ragionamenti e risultati analoghi a quelli enunciati nei due numeri precedenti; soltanto va invertito il senso delle disuguaglianze.

Se ora si hanno due superficie S_1 S_2 entrambe a curvatura variabile e nelle condizioni enunciate al principio del n. 1, si potrà considerare una superficie S_0 la cui curvatura sia costante ed abbia un valore compreso fra la *minima* di S_1 e la *massima* di S_2. Il paragone di un triangolo geodetico della S_1 con uno della S_0, e di questo con un triangolo della S_2, conduce ovviamente al paragone fra due triangoli geodetici descritti sulle S_1, S_2. Gli enunciati dei due numeri precedenti valgono quindi anche pel caso in cui le due superficie S_1 S_2 siano a curvatura variabile, sempre nella ipotesi che la curvatura di S_1 sia generalmente maggiore di quella di S_2.

Angolo di parallelismo sopra una superficie a curvatura negativa.

5. Della relazione dimostrata nel n. 3 facciamo applicazione per determinare due limiti fra i quali dev'essere compreso *l'angolo di parallelismo* sopra una qualunque superficie a curvatura negativa.

Sia S una tal superficie; indichiamo con $k_1\, k_2$ il massimo e il minimo (algebrici) della curvatura assoluta di essa. Indichiamo con S_1, S_2 le pseudosfere di curvatura k_1, k_2 rispettivamente. Sulle tre superficie consideriamo i triangoli geodetici

$$A_1\,B_1\,C_1 \quad , \quad A\,B\,C \quad , \quad A_2\,B_2\,C_2$$

rettangoli in A_1, A, A_2 e tali che

$$A_1B_1 = AB = A_2B_2 = \sigma$$
$$\text{angolo } B_1 = \text{angolo } B = \text{angolo } B_2 .$$

Pel risultato del n. 3 $\left(\text{gli angoli } C_1, C, C_2 \text{ sono qui certamente } < \frac{\pi}{2}\right)$ avremo

$$(6) \qquad A_1\,C_1 < AC < A_2\,C_2 .$$

Poniamo ora che sulle tre superficie gli angoli B_1, B, B_2, rimanendo fra loro eguali, vadano crescendo. Per la (7) il lato AC non può mantenersi di grandezza finita quando $A_1\,C_1$ cresca oltre ogni limite. Quindi AC diverrà infinitamente grande per un valore dell'angolo B, che sarà *minore* o *al più uguale* all'angolo di parallelismo, spettante al segmento σ sulla S_1 e definito dalla relazione

$$(7) \qquad \operatorname{cotg} \beta_1 = \operatorname{sen\,ip} (\sigma \sqrt{-k_1}) .$$

Similmente, per la (6), il lato AC non potrà divenire infinitamente grande, se anche $A_2\,C_2$ non cresce oltre ogni limite; vale a dire la AC diverrà infinita soltanto per un valore dell'angolo B che sarà *maggiore* o *almeno uguale* all'angolo β_2 di parallelismo spettante al segmento σ sulla S_2 e definito da

$$(8) \qquad \operatorname{cotg} \beta_2 = \operatorname{sen\,ip} (\sigma \sqrt{-k_2}) .$$

Concludiamo dunque che, *data sulla* S *una geodetica g e un punto* P *a distanza geodetica σ dalla g, l'angolo β di parallelismo nel punto* P *rispetto alla geodetica g, sarà limitato dalle disuguaglianze*

$$\beta_1 \geq \beta \geq \beta_2$$

dove β_1 e β_2 sono definiti dalle (7) (8). *Le k_1, k_2 indicano il massimo e il minimo della curvatura assoluta in* S.

6. Verifichiamo le disuguaglianze ora trovate, in un caso semplice. Sull'iperboloide rigato di rotazione, la cui equazione è

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{e^2 - 1} = a^2$$

consideriamo un punto M del parallelo di raggio r_0, e chiamiamo φ_0 l'angolo $\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ che la normale alla superficie in M fa col piano dell'equatore. Avremo

$$r_0 = \frac{a \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0}},$$

sicchè se indichiamo con β_0 l'angolo $\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ definito dalla formola

$$\operatorname{sen} \beta_0 = \frac{a}{r_0},$$

avremo

$$\operatorname{cotg} \beta_0 = \operatorname{sen} \varphi_0 \sqrt{\frac{e^2 - 1}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0}}. \tag{8}$$

Chiamiamo β l'angolo $\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ che una geodetica g uscente da M fa col meridiano in M (percorso da M verso il circolo di gola). È facile verificare, per mezzo delle note equazioni delle geodetiche sulle superficie di risoluzione, che la geodetica g *incontra* o *non incontra* il circolo di gola ($r = a$), secondo che β è *minore* o *maggiore* di β_0. In particolare se $\beta = \beta_0$ la g risulta assintotica al circolo ora detto. Quindi il β_0 definito dalla (8) è l'angolo di parallelismo del punto M rispetto al circolo di gola.

D'altra parte nella zona compresa fra il parallelo r_0 e il circolo di gola la curvatura dell'iperboloide varia tra i limiti

$$\frac{-(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0)^2}{a^2 (e^2 - 1)} \quad \text{e} \quad \frac{-1}{a^2 (e^2 - 1)}.$$

Quindi, secondo il numero precedente, dovrà aversi

$$\operatorname{sen\,ip} \frac{\sigma}{a\sqrt{e^2 - 1}} > \operatorname{cotg} \beta_0 > \operatorname{sen\,ip} \frac{\sigma (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0)}{a\sqrt{e^2 - 1}}, \tag{9}$$

dove

$$\sigma = \int_0^{\varphi_0} \frac{a(e^2 - 1)\, d\varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{3/2}} \tag{10}$$

esprime l'arco di meridiano compreso fra il punto M e il circolo di gola. Dalla (10) si ha facilmente

$$\sigma > a(e^2 - 1) \int_0^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi \,.\, d\varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^3 \varphi)^{3/2}} = \frac{a(e^2 - 1) \operatorname{sen} \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0}}$$

e quindi

$$\operatorname{sen\,ip} \frac{\sigma}{a\sqrt{e^2 - 1}} > \frac{\sigma}{a\sqrt{e^2 - 1}} > \frac{\operatorname{sen} \varphi_0 \sqrt{e^2 - 1}}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0}}.$$

Così la prima delle disuguaglianze (9) è dimostrata.

Riguardo alla seconda si osservi che

$$\sigma < \frac{a(e^2-1)}{\cos\varphi_0}\int_0^{\varphi_0}\frac{\cos\varphi\,.\,d\varphi}{(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)^{3/2}} = \frac{a(e^2-1)\,\mathrm{tang}\,\varphi_0}{\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_0}}$$

e che

$$\mathrm{sen\,ip}\,x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{per } x>0\,;$$

quindi

$$\mathrm{sen\,ip}\,\frac{\sigma(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_0)}{a\sqrt{e^2-1}} < \mathrm{sen\,ip}\,[\mathrm{tang}\,\varphi_0\sqrt{e^2-1}\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_0}] <$$

$$< \frac{\mathrm{sen}\,\varphi_0\sqrt{e^2-1}\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_0}}{\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_0-e^2\,\mathrm{sen}^4\,\varphi_0+e^4\,\mathrm{sen}^4\,\varphi_0}}\,.$$

L'ultima frazione si accrescerà se sotto al segno radicale nel denominatore si aggiunge il termine $-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_0\cos^2\varphi_0$. Ma in questo modo la detta frazione diventa

$$\frac{\mathrm{sen}\,\varphi_0\sqrt{e^2-1}}{\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi_0}}\,.$$

La seconda delle disuguaglianze (9) è così dimostrata.

ERRATA-CORRIGE.

Nella mia Nota pubblicata nel fascicolo 3 febbraio di questi Rendiconti debbono farsi le seguenti correzioni:

a pag. 152 linea 22 invece di A, A′ si legga C, C′
" " " 29 " *b*, *c* " *a*, *b*.

Geodesia. — *Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut eseguite a Oderzo, Col Brombolo e Calalzo nel 1904.* Nota del Corrispondente V. Reina.

Le determinazioni qui riferite vennero effettuate in proseguimento della livellazione astronomica iniziata fino dal 1898 lungo il meridiano di Roma. Lo strumento usato fu sempre l'Universale Bamberg appartenente al Gabinetto di Geodesia della Scuola per gli Ingegneri di Roma, ed i metodi impiegati quelli descritti nelle precedenti pubblicazioni [1].

Stazione di Oderzo.

Il punto trigonometrico è costituito dall'asse del campanile della Chiesa parrocchiale. Non essendo possibile fare stazione in centro, si eresse un pi-

[1] Cfr. la pubblicazione riassuntiva: *Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut eseguite lungo il meridiano di Roma.* R. Comm. Geod. Ital., Firenze 1903.