ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

E ciò pure nel caso in cui si allunga la posa ordinaria di 6 ore fino ad un tempo massimo di 24 ore cioè si espone il virus al radio per un tempo *4* volte superiore a quello necessario per ottenere effetti positivi con tubi di alluminio. Solo con provette di rame ebbe a notarsi un qualche ritardo dopo una posa abbastanza prolungata, ritardo che fu di 1 $^1/_2$-4 giorni col virus esposto rispettivamente al radio per 10-24 ore.

Quindi a riguardo della provetta che contiene l'emulsione noi possiamo affermare che la natura del metallo di cui essa provetta è costituita ha un importanza grandissima nella scomposizione in vitro del virus rabido; che di tutti i metalli provati, alluminio, rame, zinco, piombo, solo il primo, che si sa possedere la maggiore permeabilità per i raggi del radio, si mostrò atto alla produzione del fenomeno di cui è questione; che nelle esperienze in scala non fu possibile rilevare l'esistenza di un rapporto diretto fra la scomposizione del virus rabido e il grado di conducibilità elettrica dei singoli metalli o della loro permeabilità per i raggi del radio.

Matematica. — *Sopra le superficie algebriche che hanno le coordinate del punto generico esprimibili con funzioni meromorfe quadruplamente periodiche di due parametri.* Nota I di G. Bagnera e M. de Franchis, presentata dal Corrispondente Enriques.

1. È noto che, se

$$X = \Phi_1(u, v) \quad , \quad Y = \Phi_2(u, v) \quad , \quad Z = \Phi_3(u, v) \tag{1}$$

sono funzioni meromorfe di u, v, che posseggano le quattro coppie di periodi fondamentali:

$$\begin{matrix} \omega_1 \,, \omega_2 \,, \omega_3 \,, \omega_4 \\ \omega'_1 \,, \omega'_2 \,, \omega'_3 \,, \omega'_4 \,, \end{matrix} \tag{2}$$

e tali che esse non si possano considerare come funzioni di un solo parametro dipendente da u, v, fra X, Y, Z intercede una sola relazione algebrica irriducibile:

$$F(X, Y, Z) = 0. \tag{3}$$

Conviene distinguere due casi:

1) Ad un punto della superficie F corrisponde, a meno di periodi, una sola coppia di parametri u, v.

Allora diremo che F è una superficie *iperellittica appartenente* alla tabella (2); ogni funzione meromorfa di u, v che possegga i periodi (2) si esprime, com'è noto, *razionalmente* con X, Y, Z.

2) Ad un punto della superficie F corrisponde un numero $n > 1$ di coppie incongrue di parametri u, v.

Allora, se costruiamo una superficie *iperellittica* appartenente alla tabella (2):

$$(4) \qquad x = \varphi_1(u, v) \quad , \quad y = \varphi_2(u, v) \quad , \quad z = \varphi_3(u, v),$$

possiamo scrivere:

$$(5) \qquad \begin{aligned} X &= R_1(x, y, z) \\ Y &= R_2(x, y, z) \\ Z &= R_3(x, y, z) \end{aligned}$$

essendo le R funzioni razionali; e la superficie F è l'immagine di una involuzione algebrica di grado n sopra la superficie iperellittica (4); precisamente ad un punto di F corrispondono gli n punti di (4) che si hanno per le n soluzioni incongrue delle (1).

Questa involuzione può avere curve luoghi di punti uniti e curve *fondamentali* (i cui punti cioè sono coniugati con un punto fisso). *Noi ci poniamo nell'ipotesi che l'involuzione non possegga curve fondamentali coniugate a punti uniti.* Si dimostra poi che, se la superficie F, immagine della involuzione, non è birazionalmente identica ad una rigata (razionale od ellittica), l'involuzione non possiede curve luoghi di punti uniti. Noi ci mettiamo addirittura in questo caso.

Siano (u, v), (u', v') due punti coniugati dalla involuzione, (x, y, z), (x', y', z') le loro coordinate: dimostriamo in primo luogo x', y', z' sono funzioni analitiche *uniformi* di u, v. E difatti, se (u, v) descrive un ciclo chiuso nello spazio reale a 4 dimensioni dove si rappresentano i parametri u e v, questo ciclo può ridursi infinitesimo con deformazione continua senza traversare punti nei quali accada la coincidenza di (x', y', z') con qualcun altro dei coniugati di (u, v), e ciò perchè i punti uniti dell'involuzione ed i loro coniugati sono isolati, in forza delle ipotesi fatte.

Se allo stesso punto (x, y, z) facciamo invece percorrere un ciclo chiuso *sopra la superficie* (4), u e v ritornano, in generale, aumentati di periodi, e può il punto (x', y', z') scambiarsi con un altro dei coniugati di (x, y, z); dunque x', y', z' non sono, in generale, funzioni razionali di x, y, z.

Per renderci conto di questi scambi, basta studiare ciò che avviene per i cicli chiusi di (4) che corrispondono alle 4 coppie di periodi (2). Per uno di questi cicli, i punti del gruppo individuato da (x, y, z) subiranno una permutazione; ma, giacchè il numero di queste permutazioni è finito, ripetendo il ciclo un conveniente numero di volte, ogni punto del gruppo riprende il suo primitivo posto.

Si vede dunque che è possibile determinare un numero intero Δ tale che i cicli corrispondenti ai periodi

$$(2)' \qquad \begin{matrix} \Delta\omega_1 & \Delta\omega_2 & \Delta\omega_3 & \Delta\omega_4 \\ \Delta\omega'_1 & \Delta\omega'_2 & \Delta\omega'_3 & \Delta\omega'_4 \end{matrix}$$

ed alle loro combinazioni lascino fermo ogni punto del gruppo, ed in particolare (x', y', z').

Si consideri ora la superficie iperellittica:

$$(4)' \qquad \xi = \varphi_1\left(\frac{u}{\varDelta}, \frac{v}{\varDelta}\right), \quad \eta = \varphi_2\left(\frac{u}{\varDelta}, \frac{v}{\varDelta}\right), \quad \zeta = \varphi_3\left(\frac{u}{\varDelta}, \frac{v}{\varDelta}\right)$$

la quale non è altro che la stessa (4); però, scritta così essa *appartiene* alla tabella (2)'. Infatti le funzioni φ riprendono, per ipotesi, i loro valori *solo quando* gli argomenti $\frac{u}{\varDelta}, \frac{v}{\varDelta}$ aumentano di periodi (2), cioè quando u, v aumentano di periodi (2)'.

Giacchè le funzioni x, y, z di u, v ammettono i periodi (2)' esse si esprimono razionalmente con ξ, η, ζ. Anche x', y', z' si esprimono razionalmente con ξ, η, ζ. Infatti x', y', z' sono, da una parte, funzioni algebriche di ξ, η, ζ e d'altra parte, quando il punto (ξ, η, ζ) descrive sopra (4)' un ciclo chiuso, il punto corrispondente (x, y, z) descrive sopra (4) un ciclo chiuso che è una combinazione dei cicli corrispondenti a (2)', e perciò x', y', z' riprendono i valori iniziali.

La trasformazione semplicemente razionale che fa passare dal punto (x', y', z') al punto (ξ, η, ζ) porta u', v', che sono due *integrali semplici di prima specie* di (4) calcolati nel primo punto, in due integrali semplici di (4)' calcolati nel secondo punto, cioè nel punto $\frac{u}{\varDelta}, \frac{v}{\varDelta}$; ma ogni così fatto integrale di (4)' è una combinazione lineare di $\frac{u}{\varDelta}, \frac{v}{\varDelta}$, e perciò si ha:

$$(6) \qquad \begin{aligned} u' &= \alpha u + \beta v + c \\ v' &= \gamma u + \delta v + c' \end{aligned}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, c, c'$ costanti tali che $\alpha\delta - \beta\gamma$ non sia nullo.

Questa è la forma delle soluzioni del sistema (1) espresse mediante una di esse.

2. Tutte le sostituzioni lineari (6) formano un *gruppo* $\boldsymbol{\Gamma}$, perchè esse trasformano in sè uno stesso gruppo di punti coniugati; di questo gruppo $\boldsymbol{\Gamma}$ consideriamo il sottogruppo G, *invariante* in $\boldsymbol{\Gamma}$, costituito da tutte le operazioni (6) che siano del tipo:

$$u' = u + c \quad , \quad v' = v + c';$$

in G è, a sua volta, contenuto il gruppo *fondamentale* di (4), cioè il gruppo formato da tutte le operazioni:

$$u' = u + \Omega \quad , \quad v' = v + \Omega',$$

essendo Ω ed Ω' una coppia di periodi.

L'indice di quest'ultimo gruppo rispetto al gruppo principale Γ è evidentemente il grado n della involuzione; se denotiamo con i l'indice dello stesso gruppo rispetto a G, sarà $\frac{n}{i}$ l'indice di G rispetto a Γ.

Si costruisca ora una superficie iperellittica:

$$f(\xi , \eta , \zeta) = 0$$

il cui gruppo fondamentale sia G; ciò è possibile perchè le funzioni meromorfe di u , v che restino inalterate per le operazioni di G *esistono*: un esempio è fornito dalle (1) stesse, le quali non si alterano per tutte le operazioni di Γ ed in particolare per quelle di G.

Giacchè il gruppo Γ contiene G, le X, Y, Z sono funzioni razionali di ξ , η , ζ, e, siccome G contiene il gruppo fondamentale di (4), le ξ , η , ζ si esprimono razionalmente con x , y , z. Dunque, la nuova superficie iperellittica (ξ , η , ζ) è l'immagine di una involuzione, evidentemente di grado i, sopra la (4), e la nostra superficie F è l'immagine di una involuzione di grado $\frac{n}{i}$ sopra la superficie (ξ , η , ζ).

L'indice i vale 1 solo quando G coincide col gruppo fondamentale di (4); in ogni altro caso, possiamo abbassare il grado della involuzione passando ad un'altra superficie iperellittica.

Abbiamo dunque il diritto di supporre che G sia il gruppo fondamentale di (4); allora noi diremo brevemente che il gruppo Γ è *normale* rispetto alla tabella (2).

Sotto questa ipotesi, ogni operazione di Γ rappresenta una trasformazione *birazionale* della superficie iperellittica (4) in sè. Infatti, quando nelle (6) aumentiamo u e v di periodi, u' e v' aumentano pure di periodi e reciprocamente, perchè, in caso contrario, Γ conterrebbe operazioni del tipo:

$$u' = u + c \quad , \quad v' = v + c'$$

senza che (c , c') fosse una coppia di periodi. Dunque:

La superficie F *è immagine di una involuzione sopra una superficie iperellittica, generata da un gruppo finito di trasformazioni birazionali della superficie iperellittica in sè.*

Ad ogni operazione del sottogruppo invariante G di Γ corrisponde l'identità; conviene dunque considerare Γ rispetto al *modulo* G.

3. Il *genere* (geometrico) p e la *irregolarità* j della superficie F si possono in modo facile determinare con la semplice ispezione delle operazioni di Γ.

I numeri interi p ed j si lasciano ordinatamente definire come il numero degli integrali doppî di 1ª specie ed il numero degli integrali semplici di 1ª specie linearmente indipendenti che la superficie che si considera possiede.

Anzitutto osserviamo che ogni integrale doppio o semplice di 1ª specie della superficie F, viene, dalla trasformazione razionale (5), portato in un integrale di egual nome della superficie iperellittica (4), e, siccome una superficie iperellittica possiede, come è noto, un solo integrale doppio di 1ª specie e due soli integrali semplici di 1ª specie linearmente indipendenti, per la superficie F può essere:

$$p = 0\,, 1 \quad \text{ed} \quad j = 0\,, 1\,, 2\,.$$

Supponiamo $p = 1$. L'integrale doppio di 1ª specie di F:

$$\iint \mathrm{R}(\mathrm{X}\,, \mathrm{Y}\,, \mathrm{Z})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y},$$

quando si esprime con $u\,, v$ servendosi delle (1), deve ridursi all'unico integrale omonimo di (4) che è, a meno di un fattore costante:

$$\iint du\, dv\,.$$

Dunque, facendo il detto cambiamento di variabili, si ha:

$$\mathrm{R}(\mathrm{X}\,, \mathrm{Y}\,, \mathrm{Z})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y} = du\, dv.$$

Se ora scriviamo $u'\,, v'$ al posto di $u\,, v$, il primo membro di questa eguaglianza non si altera; segue che:

$$du'\, dv' = du\, dv$$

e perciò il determinante Jacobiano:

$$\frac{\mathrm{D}(u'\,, v')}{\mathrm{D}(u\,, v)} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

vale 1.

E sussiste anche la proposizione reciproca, cioè che, se tutte le sostituzioni di $\boldsymbol{\Gamma}$ sono unimodulari, la superficie F è di genere 1. Dunque:

La superficie F *è di genere zero o di genere uno secondo che esiste o non esiste una sostituzione di* $\boldsymbol{\Gamma}$ *che non sia unimodulare.*

Per ciò che riguarda la irregolarità j di F, si hanno i seguenti risultati:

1) *Le superficie* F *che hanno la irregolarità eguale a 2 sono soltanto le superficie iperellittiche.*

2) *Per le superficie* F *che hanno l'irregolarità eguale ad 1, il corrispondente gruppo normale* $\boldsymbol{\Gamma}$ *è ciclico, e la sua sostituzione generatrice ha uno dei moltiplicatori eguale ad 1 e l'altro diverso da 1.*

Fuori dei casi 1) e 2) la superficie F è regolare. Si osservi che le superficie F di irregolarità 1 sono sempre di genere zero.

4. Si consideri una operazione di $\boldsymbol{\Gamma}$ fuori di G; una siffatta operazione esiste, a meno che, essendo $\boldsymbol{\Gamma}$ supposto normale, la superficie F non sia birazionalmente identica alla superficie iperellitica (4).

Questa operazione, con un cangiamento lineare dei parametri, se occorre, supponiamola ridotta al tipo:

$$(6)' \qquad u' = \lambda u + c \quad , \quad v' = \mu v + c';$$

i numeri λ , μ sono ciò che si chiamano i *moltiplicatori* della sostituzione che si considera; nel nostro caso essi sono radici dell'unità, perchè il gruppo $\boldsymbol{\Gamma}$ è di grado finito (mod. G).

Intanto, come già si è detto, quando u e v aumentano di periodi, u' e v' debbono aumentare di periodi; si ha dunque per i valori $1 , 2 , 3 , 4$ dell'indice ν:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \lambda\omega_\nu &= a_{\nu 1}\,\omega_1 + a_{\nu 2}\,\omega_2 + a_{\nu 3}\,\omega_3 + a_{\nu 4}\,\omega_4 \\ \mu\omega'_\nu &= a_{\nu 1}\,\omega'_1 + a_{\nu 2}\,\omega'_2 + a_{\nu 3}\,\omega'_3 + a_{\nu 4}\,\omega'_4 \, , \end{aligned}$$

essendo le a numeri interi.

Segue che λ , μ sono radici dell'equazione di 4° grado:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Allora, se m è il grado (mod. G) del gruppo ciclico generato da $(6)'$ e $\varphi(m)$ è la solita funzione enumeratrice di Gauss, deve essere:

$$\varphi(m) \leq 4 \, ,$$

e perciò dobbiamo considerare soltanto i seguenti valori di m:

$$m = 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 8 , 10 , 12 \, .$$

Ecco una nostra proposizione fondamentale la cui dimostrazione è troppo lunga per essere riportata qui:

Se λ , μ *non sono numeri quadratici, il gruppo* $\boldsymbol{\Gamma}$ *porta sempre a superficie* F *razionali.*

Ammesso ciò, dobbiamo ritenere:

$$m = 2 , 3 , 4 , 6 \, ,$$

e λ , μ possono quindi essere scelti esclusivamente fra:

$$1 \, , \, -1 \, , \, i \, , \, -i \, , \, \varepsilon \, , \, -\varepsilon \, , \, \varepsilon^2 \, , \, -\varepsilon^2 \, ,$$

essendo ε una radice cubica immaginaria dell'unità.

Tutti questi casi di moltiplicazione complessa delle funzioni iperellittiche, se si eccettua il caso

$$u' = -u + c \quad , \quad v' = -v + c',$$

esigono speciali relazioni tra i periodi; si tratta dunque di funzioni iperellittiche *singolari*.

Per arrivare a queste relazioni osserviamo che, in corrispondenza alla sostituzione (6)', i periodi di u e v subiscono simultaneamente, come mostrano le (7), una sostituzione lineare quaternaria la cui matrice è quella formata coi numeri interi a. Questa sostituzione è di ordine finito e precisamente dello stesso ordine di (6)'.

Ora, se cambiamo i periodi fondamentali, ponendo per i valori 1, 2, 3, 4 dell'indice ν:

$$\Omega_\nu = h_{\nu 1}\,\omega_1 + h_{\nu 2}\,\omega_2 + h_{\nu 3}\,\omega_3 + h_{\nu 4}\,\omega_4\,,$$
$$\Omega'_\nu = h_{\nu 1}\,\omega'_1 + h_{\nu 2}\,\omega'_2 + h_{\nu 3}\,\omega'_3 + h_{\nu 4}\,\omega'_4\,,$$

dove le h sono interi il cui determinante vale $+1$ o -1, i nuovi periodi Ω_ν, Ω'_ν subiranno per la stessa (6)' una nuova sostituzione quaternaria che è una trasformata della prima.

E possiamo approfittare della arbitrarietà delle h per ridurre, caso per caso, la matrice della a a forma semplice.

Riassumeremo i nostri risultati scrivendo le tabelle ridotte alle quali siamo giunti e le sostituzioni generatrici del corrispondente gruppo Γ; ad ognuno di questi gruppi corrisponde una superficie F.

Noi possediamo già, per la maggior parte di queste superficie, le equazioni esplicite; per le altre ci proponiamo di proseguire la nostra analisi tentando prima una rappresentazione parametrica con le funzioni Θ iperellittiche. Ma non ci facciamo illusione circa le gravi difficoltà che presenta il problema, difficoltà dovute principalmente all'indole riposta delle relazioni che intercedono tra i moduli delle funzioni in discorso.

Matematica. — *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie.* Nota di MICHELE CIPOLLA, presentata dal Corrispondente A. VENTURI.

Matematica. — *Sugli integrali multipli.* Nota di G. FUBINI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.