ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Sopra le superficie algebriche che hanno le coordinate del punto generico esprimibili con funzioni meromorfe quadruplamente periodiche di due parametri.* Nota II [1] di G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

5. *Superficie di genere zero con la irregolarità* 1.

$$\text{I)}\quad \begin{vmatrix} 1\,,0\,,\tau\,,0 \\ 0\,,1\,,0\,,\tau' \end{vmatrix}\,, \qquad\qquad \text{II)}\quad \begin{vmatrix} 1\,,0\,,\tau\,,-\tau \\ 0\,,1\,,\tau'\,,\;\;\tau' \end{vmatrix}$$

$$\left[u'=u+\frac{1}{2}\;,\quad v'=-v\right]$$

$$\text{III)}\quad \tau'=i\quad(\text{in I})\,, \qquad\qquad \text{IV)}\quad \tau'=\frac{1+i}{2}\quad(\text{in II})$$

$$\left[u'=u+\frac{1}{4}\;,\quad v'=iv\right]$$

$$\text{V)}\quad \begin{vmatrix} 1\,,0\,,\tau\,,0 \\ 0\,,1\,,0\,,\varepsilon \end{vmatrix}\,, \qquad\qquad \text{VI)}\quad \begin{vmatrix} 1\,,0\,, & \tau & ,\,-2\tau \\ 0\,,1\,, & \dfrac{1-\varepsilon}{3} & ,\,\dfrac{1-\varepsilon}{3} \end{vmatrix}$$

$$\left[u'=u+\frac{1}{3}\;,\quad v'=\varepsilon v\right]$$

$$\text{VII)}\quad \begin{vmatrix} 1\,,0\,,\tau\,,0 \\ 0\,,1\,,0\,,\varepsilon \end{vmatrix} \qquad \left[u'=u+\frac{1}{6}\;,\quad v'=-\varepsilon v\right].$$

Tutte le superficie del precedente quadro rientrano nella classe delle superficie ellittiche di genere zero [2]. Esse hanno nulli tutti i plurigeneri, esclusi quelli il cui indice è multiplo del grado dell'involuzione ciclica di cui esse sono immagini: questi ultimi plurigeneri sono tutti eguali ad 1.

6. *Superficie regolari di genere zero e di bigenere* 1.

$$\text{VIII)}\quad \begin{vmatrix} 1\,,0\,,\tau\,,0 \\ 0\,,1\,,0\,,\tau' \end{vmatrix} \qquad\qquad \text{IX)}\quad \begin{vmatrix} 1\,,0\,,\tau\,,-\tau \\ 0\,,1\,,\tau'\,,\;\;\tau' \end{vmatrix}$$

$$\left[\left(u'=u+\frac{1}{2}\,,\,v'=-v+\frac{1}{2}\right)\;,\quad (u'=-u\,,\,v'=-v)\right].$$

7. *Superficie regolari di genere (e plurigeneri)* 1. Conviene dividere queste superficie in quattro categorie:

[1] V. pag. 492.

[2] Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XX, 1905).

α) Superficie che provengono da gruppi Γ ciclici.

$$\text{X)}\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{e}, 0, \tau', \tau \\ 0, 1, \tau, \tau'' \end{vmatrix} \qquad [u' = -u\,,\; v' = -v].$$

Il numero e è un intero positivo, e i coefficienti delle parti immaginarie in τ, τ', τ'', che denoteremo ordinatamente con $\tau_1, \tau'_1, \tau''_1$, soddisfano alla diseguaglianza $\tau_1^2 - \tau'_1 \tau''_2 < 0$. Nei casi in cui $e = 1$ le funzioni iperellittiche relative alla tabella X) provengono dal problema d'inversione di Jacobi per una curva di genere 2, e le superficie F sono allora, com'è noto, equivalenti birazionalmente a superficie di Kummer.

$$\text{XI)}\qquad \begin{vmatrix} 1, & i, \tau, & -i\tau \\ 1, & -i, \tau', & i\tau' \end{vmatrix}, \qquad \tau' = \frac{\bar{\sigma}\tau + 2\alpha}{2\beta\tau - \sigma}$$
$$[u' = iu\,,\; v' = -iv].$$

Nell'espressione di τ' i numeri α, β sono interi reali e $\sigma, \bar{\sigma}$ interi coniugati nel corpo $[1, i]$; questi interi non possono però essere scelti ad arbitrio se si vuole che esistano le funzioni iperellittiche della tabella XI).

$$\text{XII)}\qquad \begin{vmatrix} 1, \varepsilon, \tau, \varepsilon^2\tau \\ 1, \varepsilon^2, \tau', \varepsilon\tau' \end{vmatrix}, \qquad \tau' = \frac{\bar{\omega}\tau + 3\alpha}{3\beta\tau - \omega}$$
$$[u' = \varepsilon u\,,\; v' = \varepsilon^2 v].$$

Nell'espressione di τ', i numeri α, β sono, come sopra, interi reali, ma $\omega, \bar{\omega}$ sono interi coniugati nel corpo $[1, \varepsilon]$.

La stessa tabella XII) ammette anche il gruppo ciclico del 6° ordine

$$\text{XIII)}\qquad [u' = -\varepsilon u\,,\; v' = -\varepsilon^2 v].$$

β) Superficie per le quali il gruppo Γ è diedrale di grado 8.

$$\text{XIV)}\qquad \begin{vmatrix} 1, -i, & \tau, i\tau \\ \tau, & i\tau, -1, i \end{vmatrix}, \qquad \bar{\sigma}\tau^2 + 2\varrho\tau - \sigma = 0$$
$$[(u' = iu\,,\; v' = -iv)\,,\; (u' = v\,,\; v' = -u)].$$

Il numero ϱ è un intero e σ è della forma $p + iq$ con p e q interi; le funzioni iperellittiche relative alla tabella XIV *esistono* qualunque siano ϱ, p, q.

Con la stessa tabella si ha anche il gruppo:

$$\text{XV)}\qquad \left[\left(u' = iu + \frac{1+i}{2}(\tau - i)\,,\; v' = -iv + \frac{1+i}{2}(\tau + i)\right), \right.$$
$$\left. (u' = v\,,\; v' = -u)\right].$$

Per i casi XIV e XV si suppone che il discriminante $\sigma\bar{\sigma}+\varrho^2$ della equazione quadratica cui soddisfa τ, che è sempre un numero intero essenzialmente positivo, non sia un numero quadrato. I casi in cui τ sta nel corpo $[1, i]$ sono considerati nelle tabelle che seguono:

XVI) $$\begin{vmatrix} 1, -i, & 0, & 0 \\ \sigma, \quad i\sigma, & (1+i)\varrho, & (1-i)\varrho \end{vmatrix} \qquad (\sigma\bar{\sigma}+1 \equiv 0 \quad \text{mod. } 2\varrho)$$
$$[(u'=iu, v'=-iv), (u'=v, v'=-u)].$$

Con la stessa tabella si hanno ancora i due gruppi:

XVII) $$\left[\left(u'=iu+\frac{1-i}{2}, v'=-iv+\frac{1+i}{2}\sigma\right), (u'=v, v'=-u)\right]$$

XVIII) $$[(u'=iu, v'=-iv+\varrho), (u'=v, v'=-u)]$$

XIX) $$\begin{vmatrix} 1, -i, 0, 0 \\ \sigma, \quad i\sigma, \varrho, i\varrho \end{vmatrix} \qquad (\sigma\bar{\sigma}+1 \equiv \text{mod } \varrho)$$
$$[(u'=iu, v'=-iv), (u'=v, v'-=u)]$$

XX) $$[(\text{Tab. XIX}) \qquad (\sigma\bar{\sigma}+1 \equiv 0 \text{ mod } 2\varrho)]$$
$$\left[\left(u'=iu+\frac{1-i}{2}, v'=-iv+\frac{1+i}{2}\sigma\right), (u=v, v'=-u)\right]$$

XXI) $$[\text{Tab. XIX}) \qquad (\varrho \textit{ numero pari})]$$
$$\left[\left(u'=iu, v'=-iv+\frac{1+i}{2}\varrho\right), (u'=v, v'=-u)\right].$$

γ) *Superficie che provengono da gruppi* Γ *diedrali di grado 12.*

XXII) $$\begin{vmatrix} 1, \varepsilon^2, & \tau, -\varepsilon\tau \\ \tau, \varepsilon\tau, & -1, \quad \varepsilon^2 \end{vmatrix}, \quad (\bar{\omega}\tau^2+3\varrho\tau-\omega=0)$$
$$[(u'=\varepsilon u, v'=\varepsilon^2 v), (u'=v, v'=-u)].$$

Il numero ϱ è intero ed ω è della forma $p+\varepsilon q$ con p, q interi; le funzioni iperellittiche relative alla tabella XXII esistono qualunpue siano ϱ, p, q.

Con la stessa tabella si ha anche il gruppo:

XXIII) $$\left[\left(u'=\varepsilon u+\frac{1-\tau}{2}\varepsilon^2, v'=\varepsilon^2 v+\frac{1+\tau}{2}\varepsilon\right), (u'=v, v'=-u)\right].$$

Per i casi XXII e XXIII si suppone che il discriminante $4\omega\bar{\omega}+9\varrho^2$ dell'equazione quadratica cui soddisfa τ non sia un quadrato. I casi in cui τ sta nel corpo $[1, \varepsilon]$ sono considerati nelle tabelle che seguono:

XXIV) $$\begin{vmatrix} 1, \varepsilon^2, 0, 0 \\ \omega, \varepsilon\omega, \varrho, \varepsilon\varrho \end{vmatrix} \qquad (\omega\bar{\omega}+1 \equiv 0 \text{ mod } \varrho)$$
$$[(u'=\varepsilon u, v'=\varepsilon^2 v), (u'=v, v'=-u)].$$

Con la stessa tabella, ma con la condizione $\omega\bar{\omega}+1\equiv 0 \mod 2\varrho$, si hanno ancora i due gruppi:

$$\text{XXV)}\qquad \left[\left(u'=\varepsilon u+\frac{1}{2}\,,\,v'=\varepsilon^2 v+\frac{\omega}{2}\right),\ (u'=v\,,\,v'=-u)\right]$$

$$(\omega=p+\varepsilon q \text{ con } p\,,q \text{ dispari})$$

$$\text{XXVI)}\qquad \left[\left(u'=\varepsilon u\,,\,v'=\varepsilon^2 v+\frac{\varrho}{2}\right),\ (u'=v\,,\,v'=-u)\right]$$

$$(\varrho \text{ pari};\ p\,,q \text{ dispari}).$$

La condizione che p e q siano dispari non è essenziale, perchè i casi XXV e XXVI si presentano anche quando uno dei detti numeri è pari e l'altro dispari; ma possiamo sempre ridurci al caso di $p\,,q$ dispari cambiando, se occorre, ω in $\varepsilon\omega$ o in $\varepsilon^2\omega$.

δ) *Superficie che provengono da gruppi* $\boldsymbol{\Gamma}$ *tetradrali di grado 24.*

$$\text{XXVII)}\qquad \begin{vmatrix}1\,, & -i\,, & 0\,, & 0\\ \sigma\,, & i\sigma\,, & (1+i)\varrho\,, & (1-i)\varrho\end{vmatrix}\qquad (\sigma\bar{\sigma}+1\equiv 0 \mod 2\varrho)$$

$$\left[(u'=iu\,,\,v'=-iv)\,,\left(u'=\frac{1+i}{2}(u+v)\,,\,v'=\frac{1-i}{2}(v-u)\right)\right]$$

$$\text{XXVIII)}\qquad \left[(\text{Tab. XXVII})\,,\left(u'=iu+\frac{1-i}{2}\,,\,v'=-iv+\frac{1+i}{2}\sigma\right),\right.$$
$$\left.\left(u'=\frac{1+i}{2}(u+v)\,,\,v'=\frac{1-i}{2}(v-u)\right)\right]$$

$$\text{XXIX)}\qquad \left[(\text{Tab. XXVII})\,,(u'=iu\,,\,v'=-iv+\varrho),\right.$$
$$\left.\left(u'=\frac{1+i}{2}(u+v)\,,\,v'=\frac{1-i}{2}(v-u)\right)\right].$$

Nella classificazione fatta non figurano:

1) Le superficie iperellittiche. 2) Le superficie razionali. 3) Le superficie birazionalmente identiche a rigate ellittiche.

Ecco un altro risultato interessante:

Quando la tabella dei periodi fondamentali può ridursi al tipo

$$\begin{vmatrix}1\,, & 0\,, & \tau'\,, & \tau\\ 0\,, & 1\,, & \tau\,, & \tau''\end{vmatrix}$$

in modo che i coefficienti $\tau_1\,,\tau_1'\,,\tau_1''$ delle parti immaginarie di $\tau\,,\tau'\,,\tau''$ soddisfino alla disuguaglianza $\tau_1^2-\tau_1'\tau_1''<0$, *tutte le superficie* F, *escluse quelle dei casi* III, IV, V, VI, VII, *sono rappresentabili sul piano doppio.*

Una osservazione semplicissima permette in molti casi di verificare la cosa, senza fare alcun calcolo: se il gruppo Γ corrispondente alla superficie F si può estendere, tenendo ferma la tabella dei periodi, in un gruppo di grado doppio, *che porti a superficie razionali*, la F si rappresenta sul piano doppio, perchè essa viene a possedere un'involuzione di 2° ordine razionale.

8. Noi dobbiamo fra breve dare un rendiconto molto più esteso del nostro lavoro; ma vogliamo fin da ora mettere in rilievo un fatto che mostra l'indole del problema che trattiamo; questo è che le trasformazioni del gruppo Γ sono *generalmente*, sopra la corrispondente superficie iperellittica, trasformazioni *singolari* nel senso di Humbert (1).

In altri termini, le funzioni Theta iperellittiche che servono ad esprimere le funzioni meromorfe quadruplamente periodiche x, y, z, che sono le coordinate del punto generico della superficie, non vengono dalle operazioni di Γ trasformate in Theta, ma in funzioni che verificano equazioni funzionali più generali di quelle cui soddisfano le Theta (funzioni *intermediarie* secondo Poincarè ed Humbert); queste funzioni più generali analoghe alle Theta esistono in forza delle speciali relazioni che intercedono tra i periodi.

Noi chiariremo meglio il nostro pensiero con un esempio.

Consideriamo il caso di gruppi Γ ciclici di quart'ordine, che è quello segnato XI nella nostra classificazione.

Supponiamo in primo luogo che la relazione bilineare fra τ e τ' che accompagna la tabella XI sia:

$$\tau' = 1 - \tau$$

e cambiamo i parametri u, v ponendo:

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}(u + v) \quad , \quad \mathrm{V} = \frac{1}{2i}(u - v).$$

Allora, la tabella corrispondente ad XI per gl'integrali U, V si riduce subito a

$$\begin{vmatrix} 1, 0, \frac{1}{2}, & g \\ 0, 1, g, & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{vmatrix} 1, 0, \frac{1}{2}, g \\ 0, 1, g, \frac{1}{2} \end{vmatrix} \qquad \left[g = i\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\right]$$

e la sostituzione di quart'ordine che genera il gruppo Γ si scrive:

$$\mathrm{U}' = -\mathrm{V} \quad , \quad \mathrm{V}' = \mathrm{U}. \tag{8}$$

(1) Humbert, *Sur les fonctions abeliennes singulières* (Journal de Mathematiques, 1899, 1890).

Il sistema di funzioni meromorfe quadruplamente periodiche relativo alla tabella ora scritta esiste sotto la sola condizione che g sia immaginario; ma qualsivoglia superficie iperellittica di questo sistema rappresenta la totalità delle coppie di punti della curva di genere 2:

$$\eta^2 = \xi^5 + k\xi^3 + \xi$$

e la trasformazione (8) equivale a fare su questa curva la trasformazione lineare

$$\eta' = i\eta \quad , \quad \xi' = -\xi$$

che la cambia in sè. Ci troviamo dunque in uno dei casi, studiati da Bolza [1], di curve di genere 2 che ammettono trasformazioni birazionali in sè, fuori, s'intende, di quella prodotta dalle coppie di punti della serie canonica. Le involuzioni sopra le superficie iperellittiche, che vengono in corrispondenza a queste trasformazioni birazionali, sono i casi più semplici che si possano immaginare; le corrispondenti trasformazioni del gruppo $\boldsymbol{\Gamma}$ sono allora trasformazioni (*ordinarie*) d'Hermite le quali cambiano le Theta in Theta.

La trasformazione (8) può anche pensarsi come un'operazione di secondo ordine, purchè si ritenga il suo quadrato:

$$U' = -U \quad , \quad V' = -V$$

eguale all'identità; ciò equivale a metterci sopra la superficie di Kummer relativa alla tabella di periodi che qui si considera, che è una superficie di Kummer due volte tetraedroidale. Questa operazione di secondo ordine è una omografia rigata involutoria che trasforma in sè la detta superficie di Kummer.

Supponiamo in secondo luogo che la relazione bilineare tra τ e τ' che accompagna la tabella XI sia:

$$\tau' = \frac{6}{\tau} \,. \tag{9}$$

Cambiamo i periodi fondamentali di u e v ponendo:

$$\omega_1 = 2 + 2i - i\tau \ , \ \omega_2 = -1 - 2i + i\tau \ , \ \omega_3 = 3i - i\tau \ , \ \omega_4 = \tau$$
$$\omega_1' = 2 - 2i + i\tau' \ , \ \omega_2' = -1 + 2i - i\tau' \ , \ \omega_3' = -3i + i\tau' \ , \ \omega_4' = \tau';$$

il determinante di questa trasformazione lineare è:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

e vale -1.

[1] American Journal of Mathematics, t. X.

Prendiamo dunque come tabella dei periodi di u, v:

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_1' & \omega_2' & \omega_3' & \omega_4' \end{vmatrix}$$

ed osserviamo che, in forza della supposta relazione tra τ e τ', sussiste fra le ω e le ω' quest'altra, facile a verificarsi:

$$(\omega_1 \omega_3' - \omega_1' \omega_3) + (\omega_2 \omega_4' - \omega_2' \omega_4) = 0\,.$$

Dopo ciò, cambiamo gl'integrali u, v ponendo:

$$u = \omega_1 \mathrm{U} + \omega_2 \mathrm{V} \quad , \quad v = \omega_1' \mathrm{U} + \omega_2' \mathrm{V},$$

così che, quando u, v aumentano di ω_1, ω_1' o di ω_2, ω_2', i nuovi integrali U, V aumentano ordinatamente di $1, 0$ o di $0, 1$. Dunque, la tabella che corrisponde a quella ultimamente scritta è della forma:

$$\begin{vmatrix} 1\,, & 0\,, & g\,, & h \\ 0\,, & 1\,, & h\,, & g' \end{vmatrix}\,; \tag{10}$$

ma fra le g, g', h, che sono in sostanza funzioni razionali del solo parametro τ, si hanno le due relazioni:

$$g' = 2g \quad , \quad h^2 - gg' = 3\,. \tag{11}$$

E si verifica inoltre con un calcolo non breve ma facile che la sostituzione di quarto ordine, generatrice di Γ, si scrive con i nuovi parametri U,V così:

$$\begin{aligned} \mathrm{U}' &= (2g + h)\,\mathrm{U} + (1 - g - h)\,\mathrm{V} \\ \mathrm{V}' &= 2(1 + g + h)\,\mathrm{U} - (2g + h)\,\mathrm{V}. \end{aligned} \tag{12}$$

Se g_1, g_1', h_1 sono i coefficienti dell'immaginario i in g, g', h ordinatamente, le (11) sono evidentemente compatibili con la condizione:

$$h_1^2 - g_1 g_1' < 0\,,$$

che basta, come si sa, ad assicurare l'esistenza delle funzioni iperellittiche relative alla tabella (10). Dunque, la posizione (9) non porta ad un caso illusorio.

Intanto accade che la (12) non trasforma le funzioni Theta della tabella (10) in funzioni Theta, bensì in *funzioni intermediarie*, e perciò la (12) non si traduce in una trasformazione birazionale sopra la curva di genere 2 che dà origine alla tabella in discorso, quantunque la superficie iperellittica relativa a questa tabella sia in corrispondenza biunivoca con le *coppie* di punti della curva ora detta.

Segue che la trasformazione birazionale *involutoria* prodotta dalla (12) sopra una superficie di Kummer della tabella (10) non è una trasformazione omografica; noi dimostreremo altrove che *la* (12) *si traduce in una* *omografia sopra una superficie di quarto ordine birazionalmente identica alla detta superficie di Kummer.*

Un' ultima osservazione:

Le relazioni (11) sono due *relazioni singolari*, perchè rientrano nel tipo:

$$D(h^2 - gg') + Ag + Bh + Cg' + E = 0,$$

con A, ..., E numeri interi, che serve di definizione a tali relazioni.

È noto che, affinchè la superficie iperellittica relativa ad una tabella del tipo (10) possegga integrali di 1ª specie *ellittici*, è necessario e sufficiente che esista una relazione singolare il cui *invariante*, che per la relazione generale scritta avanti è:

$$B^2 - 4AC - 4DE,$$

sia un numero quadrato (¹).

Ora, nel nostro caso, ogni relazione singolare tra i periodi (10) è fatta così:

$$\lambda(h^2 - gg' - 3) + \mu(g' - 2g) = 0,$$

con λ, μ interi, e l'invariante è:

$$8\mu^2 + 12\lambda^2.$$

Ma si vede facilmente che questa forma non può rappresentare un quadrato; e quindi il caso in esame è un caso iperellittico *puro* nel senso che non esistono integrali ellittici di 1ª specie, o, ciò che vale lo stesso, la nostra superficie iperellittica non possiede fasci di curve ellittiche.

Matematica. — *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie.* Nota I di MICHELE CIPOLLA, presentata dal Corrispondente A. VENTURI.

Noi abbiamo già risoluto, quando il modulo p è un numero primo, la questione di determinare una soluzione *apiristica* della congruenza binomia

$$x^n \equiv a \pmod{p},$$

cioè un polinomio in a, che fornisca una soluzione della congruenza per ogni a residuo n-ico di p (²).

Il problema generale relativo ad un modulo qualunque si riconduce, com'è noto, alla risoluzione di congruenze binomie i cui moduli sono potenze

(¹) Humbert, loc. cit.

(²) *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie,* Mathematische Annalen, 1906, LXIII Band., pp. 54-61.