ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Paragone fra due triangoli geodetici a lati uguali.* Nota del Corrispondente P. Pizzetti.

1. Ho recentemente dimostrato, nelle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino [1], come, dato un triangolo geodetico T sopra una porzione S, opportunamente limitata, di superficie a curvatura positiva, è sempre possibile sopra due sfere di curvatura uguale rispettivamente al massimo e al minimo valore della curvatura assoluta di S, tracciare due triangoli sferici T_1, T_2, tali che i sei elementi (angoli e lati) del triangolo T siano, in grandezza, ordinatamente compresi fra i sei elementi di T_1 e quelli di T_2.

Questa proposizione ha speciale interesse per le ricerche relative ai limiti superiori degli errori che si commettono nella risoluzione numerica approssimata dei triangoli geodetici.

Voglio qui dimostrare come, precisamente, si possano i triangoli sferici T_1, T_2 assoggettare alla condizione di avere i tre lati ordinatamente uguali a quelli del triangolo geodetico T: in questo caso i tre angoli di T risultano ordinatamente *inferiori* a quelli del triangolo T_1 descritto sulla sfera di curvatura *massima*, e *superiori* a quelli del T_2 descritto sulla sfera di curvatura *minima*.

Basta per questo dimostrare che *se si considerano due superficie, o porzione di superficie* S, S_1 *tali che la curvatura assoluta in un qualsiasi punto di* S *sia non maggiore di quella che in ogni punto di* S_2 [2], *descritti sulle due superficie due triangoli geodetici di eguali lati, gli angoli del 1° riusciranno ordinatamente minori di quelli corrispondenti del 2°.* Intendiamo, naturalmente, per angoli *corrispondenti* quelli opposti a lati eguali.

2. Sulla superficie S siano σ, α le coordinate polari geodetiche di un punto A rispetto a un polo P. Sarà

$$ds^2 = d\sigma^2 + g^2 \, . \, d\alpha^2$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare. La g esprime la così detta *lunghezza ridotta* dell'arco geodetico AP, e soddisfà alle relazioni

$$k = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2}, \tag{1}$$

$$(g)_{\sigma=0} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = 1, \tag{2}$$

(1) *Intorno al grado di approssimazione che si raggiunge nel risolvere i triangoli geodetici sopra una superficie qualunque* (Mem. Accademia R. delle Scienze di Torino, serie II, tom. LVII).

(2) Escludiamo qui, e poi, il caso in cui entrambe le superficie siano a curvatura costante.

dove k è la curvatura assoluta di S in A. Riguardo a questa k supporremo che essa sia finita in ogni punto; essa potrà presentare discontinuità ordinarie nel passaggio attraverso linee della superficie.

Se la superficie è a curvatura *negativa*, la (1) dimostra che la derivata $\frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2}$ è, in ogni punto, dello stesso segno di g, e quindi la $\frac{\partial g}{\partial \sigma}$ è crescente finchè $g > 0$. D'altra parte, in causa delle (2), la g assume valori positivi per valori abbastanza piccoli di σ. Dunque per ogni valore di σ (eccettuato $\sigma = 0$) sarà $\frac{\partial g}{\partial \sigma} > 1$, e $g > 0$.

Riguardo alle superficie a curvatura *positiva*, ovvero *in parte positiva in parte negativa*, ci varremo della espressione di g

$$g = \mathrm{R} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{\mathrm{R}} + \mathrm{R} \int_0^\sigma g_x (k_1 - k_x) \operatorname{sen} \frac{\sigma - x}{\mathrm{R}} dx \tag{3}$$

data nella citata Memoria, dove k_1 è una quantità positiva finita qualsiasi ed $\mathrm{R} = 1 : \sqrt{k_1}$; g_x e k_x indicano le espressioni di k e g, ove in luogo della lettera σ si ponga la x. La (3) dimostra che, se la curvatura k si mantiene algebricamente inferiore a k_1, la g non può annullarsi per un arco $\sigma \leq \pi \mathrm{R}$. Derivando la (3) abbiamo

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = \cos \frac{\sigma}{\mathrm{R}} + \int_0^\sigma g_x (k_1 - k_x) \cos \frac{\sigma - x}{\mathrm{R}} dx$$

la quale (insieme colla osservazione ora detta riguardo a g) dimostra che, nella ipotesi fatta riguardo a k, la $\frac{\partial g}{\partial \sigma}$ non può annullarsi per un arco $\sigma \leq \pi \mathrm{R} : 2$, ossia per

$$\sigma \leq \frac{\pi}{2\sqrt{k_1}} . \tag{4}$$

Quando, pertanto, la superficie non sia tutta a curvatura negativa, intenderemo che gli archi di geodetica da prendere in considerazione siano, in lunghezza, limitati secondo la (4).

Con questa limitazione la *curvatura geodetica*, nel punto A, della circonferenza geodetica di centro P, espressa da

$$h = -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \sigma} ,$$

sarà *finita* e *negativa* in ogni punto (eccettuato in P).

Si consideri ora una seconda superficie, o porzione di superficie, S_1, sulla quale assumiamo un punto P_1 come polo di coordinate polari e facciamo corrispondere al punto $A(\sigma, \alpha)$ della S il punto A_1 di eguali coordi-

nate σ, α. Indichiamo, pel punto A_1, con K, G, H le cose analoghe alle k, g, h. Posto

$$D = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial \sigma},$$

avremo

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(g G D) = G\frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} - g\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma^2} = g G (K - k).$$

Ora il prodotto $g G D$ si annulla per $\sigma = 0$. Esso sarà quindi positivo per ogni valore di σ se si suppone $K > k$. Se dunque supponiamo che la curvatura assoluta della S_1 sia, in ogni punto dell'arco $A_1 P_1$, maggiore di quella della S nel corrispondente punto dell'arco AP, la curvatura geodetica in A della circonferenza di centro P sarà, in valore assoluto, maggiore di quella della corrispondente circonferenza in A_1. E, tenuto conto del segno,

$$h < H. \tag{5}$$

3. Sopra la superficie S si assuma ora un sistema di coordinate bipolari, indicando con u e v le distanze geodetiche del punto generico M da due punti fissi A e B. Ove la superficie non sia tutta a curvatura negativa, la intenderemo limitata in modo che nè u, nè v superino il limite fissato dalla (4). Allora per le cose dette nel § 6 della citata Memoria, due punti della regione così limitata saranno collegati da *una sola* geodetica. Chiamando θ l'angolo in M del triangolo AMB, l'espressione del quadrato dell'elemento lineare sarà

$$ds^2 = \frac{du^2 - 2\,du\,dv\cos\theta + dv^2}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Poichè l'angolo θ non può assumere i valori 0 e π, all'infuori dei punti della geodetica AB [1], il reticolato delle linee coordinate sarà regolare in tutta la regione della superficie che si ha da considerare. La curvatura geodetica della linea $u = \text{cost}$ (circonferenza geodetica di centro A), per la formula generale

$$h_u = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right\},$$

sarà

$$h_u = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}.$$

[1] Se fosse $\theta = 0$ fuori della geodetica AB, un punto e la tangente in esso determinerebbero due differenti geodetiche, il che si esclude. Se fosse $\theta = \pi$, gli archi u, v sarebbero per diritto fra loro e i punti A, B risulterebbero collegati da due differenti geodetiche.

Similmente

$$h_v = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

donde, eliminando prima $\frac{\partial\theta}{\partial v}$, poi $\frac{\partial\theta}{\partial u}$:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\,.\cos\theta}{\partial u} = h_u\cos\theta - h_v \\[2ex] \dfrac{\partial\,.\cos\theta}{\partial v} = h_v\cos\theta - h_u. \end{cases}$$

Pongasi ora

$$u + v = \alpha \quad , \quad u - v = \beta,$$

in guisa che

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}.$$

Avremo dalle (6)

$$\frac{\partial\,.\cos\theta}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}(h_u + h_v)(\cos\theta - 1)$$

ovvero

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\log\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}(h_u + h_v).$$

Similmente

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\log\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}(h_u - h_v).$$

4. Le linee $\alpha = \text{cost}$, $\beta = \text{cost}$ sono le così dette *ellissi* e *iperboli geodetiche* aventi i fuochi in A e B. Il quadrato dell'elemento lineare riferito a tali coordinate assume la forma

$$(8^{bis})\qquad ds^2 = \frac{d\alpha^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} + \frac{d\beta^2}{4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}};$$

e poichè, come si è detto, θ non può assumere i valori 0 e π, i coefficienti di questa equazione resteranno finiti in tutta la regione della superficie che si ha da considerare, eccetto che nei punti della geodetica AB. Di più, poichè entro la regione di superficie considerata, ogni geodetica è linea di lunghezza minima e quindi la somma di due lati di un triangolo geodetico è maggiore del terzo, chiamando c la lunghezza dell'arco AB, dovrà essere, per ogni punto esterno alla geodetica AB:

$$(9)\qquad u + v > c \quad , \quad |u - v| < c,$$

il chè vuol dire che la ellisse geodetica passante per un punto qualsiasi dovrà intersecare la geodetica AB in punti fuori dell'arco $AB = c$, e ogni iperbola geodetica dovrà intersecare la AB in un sol punto entro l'arco stesso AB. È poi evidente che i punti di intersezione di una ellisse geodetica colla AB non possono essere più di due.

Ciò posto per il punto M considerato si immagini tracciata la iperbola geodetica i la quale intersechi in M_0 l'arco AB. Lungo l'arco $M_0 M$ della i la variabile α cresce da c ad $u+v$ e poichè il rapporto $d\alpha : ds_i = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ (intendiamo con s_i la lunghezza d'arco della i) non può annullarsi fuori che in M_0, per quanto si è detto riguardo all'angolo θ, la α dovrà continuamente crescere da M_0 ad M.

Integrando allora la (7) lungo l'arco $M_0 M$ ed osservando che in M_0 si ha $\theta = 180°$, $\alpha = c$, avremo

$$\log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4} \int_c^{u+v} (h_u + h_v)\, d\alpha. \tag{9}$$

Per una seconda superficie S_1, la cui curvatura sia in ogni punto non minore del massimo della curvatura di S, consideriamo il triangolo $A_1 M_1 B_1$ del quale i lati sono

$$A_1 B_1 = c \qquad A_1 M_1 = u \qquad M_1 B_1 = v.$$

Indicando con $H_u H_v$ le cose analoghe alle $h_u h_v$, e con Θ l'angolo $A_1 M_1 B_1$ avremo

$$\log \operatorname{sen} \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{4} \int_c^{u+v} (H_u + H_v)\, d\alpha$$

la quale paragonata colla (9), e, tenuto conto della (5), dimostra che

$$\theta < \Theta.$$

Il teorema enunciato al n. 1 è così dimostrato.

5. Analogamente alla formola (9), può scriversi la

$$\log \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4} \int_c^{u+v} (h_u - h_v)\, d\beta, \tag{10}$$

la quale si ottiene integrando la (8) lungo l'arco $M_1 M$ di ellisse geodetica, fra il punto M_1 in cui questa interseca la geodetica AB oltre B (nel quale punto $\theta = 0$, $\beta = c$) fino al punto M.

Nel caso della sfera di raggio 1, posto

$$h_u = -\operatorname{cotg} u = -\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$h_v = -\operatorname{cotg} v = -\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

le (8) (9) conducono immediatamente alle note formole trigonometriche

$$\log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(c + u - v) \,.\, \operatorname{sen} \frac{1}{2}(c - u + v)}{\operatorname{sen} u \,.\, \operatorname{sen} v}$$

$$\log \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(c + u + v) \,.\, \operatorname{sen} \frac{1}{2}(u + v - c)}{\operatorname{sen} u \,.\, \operatorname{sen} v}.$$

6. I secondi membri delle formole (9) e (10) possono esprimersi diversamente, osservando che, per la forma (8bis) dell'elemento lineare, la curvatura geodetica della linea $\alpha = \text{cost}$ (ellisse geodetica) è:

$$h_\alpha = \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}$$

e l'elemento d'arco della $\beta = \text{cost}$ (iperbola geodetica) è:

$$ds_\beta = \frac{d\alpha}{2 \cos \frac{\theta}{2}}.$$

Abbiamo dunque

$$h_\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta},$$

donde

$$\log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \int_{M_0}^{M} h_\alpha \,.\, ds_\beta.$$

Similmente

$$\log \cos \frac{\theta}{2} = \int_{M_1}^{M} h_\beta \,.\, ds_\alpha;$$

la prima di queste due integrazioni è estesa lungo l'arco $M_0 M$ di iperbola, la seconda lungo l'arco $M_1 M$ di ellisse geodetica.

Fisica. — *Relazione fra la pressione osmotica e la tensione superficiale* [1]. Nota del Corrisp. A. Battelli e di A. Stefanini.

Lo studio che già iniziammo sulla natura della pressione osmotica [2], ci portò a ritenere: *a*) che debbono essere isoosmotiche quelle soluzioni che hanno ugual tensione superficiale; *b*) che quando due liquidi di tensione superficiale diversa sono separati da una parete porosa o semipermeabile, il passaggio attraverso il setto deve avvenire nel modo, che più si presta a rendere uguali le tensioni superficiali delle due parti.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa.

[2] Rend. della R. Acc. dei Lincei, XIV, Serie V, 2° sem. 1905, pag.