ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 maggio 1907.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Le ricerche, che da varî anni vado proseguendo, sulle superficie deformate per flessione delle superficie di secondo grado avevano per iscopo di costruire, per le superficie applicabili sulle *quadriche generali*, una teoria delle trasformazioni perfettamente analoga a quella ben nota delle deformate della sfera reale od immaginaria, cioè delle superficie a curvatura costante positiva o negativa. Ho risoluto dapprima il problema per due classi particolari di quadriche, quella delle quadriche rotonde e quella dei paraboloidi [1]. Col sussidio delle proprietà geometriche osservate in questi casi particolari, ho potuto poi estendere le mie ricerche alle quadriche generali, e in due successive Note: *Sur la déformation des quadriques*, apparse nei Comptes Rendus de l'Académie de Paris [2], ho esposto i principali risultati della mia ricerca.

Ulteriori studî sull'argomento mi hanno recentemente condotto a completare e semplificare quei metodi di trasformazione, per modo che lo scopo a cui miravo può dirsi ormai pienamente raggiunto e la teoria costruita

[1] V. le mie Memorie: *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde*, Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), serie 3ª, t. XIV (1905); *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi*, Annali di matematica, serie 3ª, tomo XII (1906).

[2] T. 142 e 143, 5 mars et 29 octobre 1906.

offre ora il medesimo grado di semplicità e di sviluppo come quella particolare delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante..

Nella presente Nota darò soltanto gli enunciati delle principali proposizioni della nuova teoria, riserbando ad un'ampia Memoria, che sto preparando, gli sviluppi e le dimostrazioni.

2. L'elemento geometrico essenziale per le trasformazioni delle superficie a curvatura costante è fornito, come ben si sa, da una particolare classe di congruenze rettilinee, le cui due falde focali hanno la medesima curvatura costante e sono per ciò applicabili l'una sull'altra e sopra una medesima sfera. Queste congruenze sono *congruenze* W, cioè sulle loro falde focali si corrispondono le linee asintotiche (i sistemi coniugati). Ma il fatto più importante sul quale si fonda la teoria di queste trasformazioni consiste in ciò che: ogni superficie S di curvatura costante dà luogo ad ∞^2 congruenze della detta specie, di cui S è la prima falda focale; le seconde falde focali S_1 dànno allora le superficie trasformate.

Colla nuova teoria estendiamo questi risultati alle deformate di tutte le quadriche, dimostrando che se alla sfera si sostituisce una qualunque quadrica Q sussistono ancora i medesimi fatti fondamentali, e cioè in primo luogo: esistono infinite congruenze rettilinee W (dipendenti da due funzioni arbitrarie) le cui due falde focali sono applicabili sulla quadrica Q. Precisiamo il grado di arbitrarietà di queste congruenze col seguente teorema fondamentale:

Teorema A). *Ogni superficie* S *applicabile sopra una quadrica* Q *appartiene, come prima falda focale, ad una doppia infinità di congruenze rettilinee* W, *le cui seconde falde focali* S_1 *sono applicabili sulla medesima quadrica* Q.

Il passaggio dalla deformata iniziale S della quadrica Q ad una qualunque delle nuove S_1 dà una delle ∞^2 *trasformazioni* della S che noi consideriamo.

3. Nelle trasformazioni di una data deformata S della quadrica fondamentale Q entrano, come si è detto, *due costanti arbitrarie*, che conviene innanzi tutto interpretare geometricamente. La prima di esse ha un significato ben notevole, che riconosciamo nel modo seguente. Prendiamo una delle nostre congruenze W, colle falde focali S, S_1 applicabili sulla quadrica Q, e consideriamo sopra S, S_1 le infinite coppie di punti corrispondenti F, F_1, che sono i punti (fuochi) ove i raggi della congruenza toccano S, S_1. Immaginiamo che la superficie S si fletta trasportando seco, invariabilmente legati, i segmenti tangenti FF_1, e deformiamo la S sino ad applicarla sulla quadrica Q. Abbiamo allora il semplice e fondamentale risultato:

I termini F_1 *dei segmenti* FF_1, *così trasportati sulla quadrica* Q, *si dispongono sopra una seconda quadrica* Q_1 *omofocale a* Q, *che forma il loro luogo.*

Dipendentemente dalla *prima* costante della trasformazione, la quadrica Q_1 può occupare una qualunque posizione nel detto sistema confocale. Per questa prima costante si può dunque assumere, come faremo, precisamente il parametro k, col quale individuiamo la quadrica Q_1 nel sistema; la nostra trasformazione sarà indicata corrispondentemente col simbolo B_k.

Per un assegnato valore di k la trasformazione B_k fa nascere dalla superficie iniziale S una semplice infinità di superficie trasformate S_1. Per trovare effettivamente queste ∞^1 trasformate S_1 abbiamo da integrare una equazione differenziale del tipo di Riccati, nei cui coefficienti entra già la prima costante k.

La *seconda* costante viene introdotta dalla integrazione e, disponendo di questa, potremo fissare ad arbitrio, per un punto iniziale F della S, la direzione del raggio FF_1 della congruenza. Si disporrà insieme delle due costanti fissando (ad arbitrio), nel piano tangente in un punto iniziale F alla S, il segmento focale FF_1, in grandezza ed orientazione.

È da notarsi poi che *le nostre trasformazioni* B_k *esistono sempre anche per quei particolari valori di* k *che riducono la quadrica confocale* Q_1 *ad uno dei piani principali* (*contato due volte*). È questo un caso particolare ben notevole delle trasformazioni B_k.

4. Il presentarsi di un'equazione di Riccati nel nostro problema d'integrazione corrisponde ad una proprietà geometrica, che occorre approfondire.

Se consideriamo le ∞^1 trasformate S_1 della superficie iniziale S per mezzo della trasformazione B_k, la semplice infinità di punti F_1 delle S_1, che corrispondono ad un determinato punto F di S, formano, nel piano tangente di S in F, una linea luogo. Basta ricordare quanto abbiamo detto sopra per riconoscere che questo luogo è una conica C; così abbiamo in ciascuno degli ∞^2 piani tangenti di S una conica C, la cui forma e giacitura nel piano tangente sono invariabilmente legate alla S nelle sue flessioni e: *quando la* S *si distende sulla quadrica* Q, *seco trasportando le* ∞^2 *coniche* C, *queste diventano le sezioni prodotte dai piani tangenti di* Q *nella quadrica confocale* Q_1.

Ciò premesso, la interpretazione geometrica della equazione di Riccati risulta dal teorema seguente:

Le ∞^1 *superficie* S_1, *trasformate della iniziale* S, *segnano sopra le coniche* C, *tracciate nei piani tangenti di* S, *serie proiettive di punti.*

Basta quindi introdurre come incognita il parametro t da cui dipendono razionalmente le coordinate di un punto mobile sulla conica C e l'equazione (ai differenziali totali) per determinare il valore di t al punto d'incontro di S_1 colla conica C assume conseguentemente la forma di Riccati.

Corrispondentemente poi a quanto abbiamo notato alla fine del numero precedente, rispetto alle singolari trasformazioni B_k per le quali la quadrica confocale Q_1 si riduce ad un piano principale, è da osservarsi che: *in questo* *caso le coniche* C *si riducono alle rette d'intersezione dei piani tangenti della quadrica* Q *col piano principale, e le* ∞^1 *superficie* S_1 *trasformate segano queste rette in punteggiate proiettive.*

5. Arriviamo ora ad una nuova e notevole proprietà geometrica, che dà la *legge di applicabilità* l'una sull'altra delle due falde focali S, S_1 di una delle nostre congruenze.

Abbiamo già osservato, al n. 3, che allorquando la prima falda S assume per flessione la forma della quadrica Q, seco trasportando i segmenti tangenti FF_1, i termini F_1 di questi si dispongono sulla quadrica confocale Q_1. Così dalla applicabilità di S sopra Q resta fissata una corrispondenza fra i punti F_1 della seconda falda S_1 ed i punti M_1 della quadrica confocale Q_1. D'altra parte, essendo la S_1 applicabile alla sua volta sopra la quadrica Q, ad ogni punto F_1 di S_1 corrisponde in questa applicabilità, un determinato punto M di Q. La ricerca della legge di applicabilità delle due falde focali S, S_1 l'una sull'altra si riporta dunque a quella della legge di corrispondenza fra i punti M, M_1 delle due quadriche confocali Q, Q_1. Ora vi ha una legge, per così dire naturale, di corrispondenza fra i punti di due quadriche confocali: quella data dal teorema di Ivory che trasforma con una proiettività affine l'una quadrica nell'altra, e che noi chiameremo *l'affinità di Ivory* (vedi p. es. *Encyklopädie der math. Wissenschaften*, Bd. III_2, Heft 2, n. 62) (1). E noi troviamo questo semplice ed importante risultato:

La legge di applicabilità delle due falde focali S, S_1 *di una delle nostre congruenze è data dalla affinità di Ivory fra le due quadriche confocali* Q, Q_1.

(1) Se Q, Q_1 sono quadriche a centro di rispettive equazioni

$$Q)\quad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$$

$$Q_1)\quad \frac{x_1^2}{A+k}+\frac{y_1^2}{B+k}+\frac{z_1^2}{C+k}=1\,,$$

le formole dell'affinità di Ivory sono semplicemente:

$$x_1=x\sqrt{\frac{A+k}{A}}\,,\quad y_1=y\sqrt{\frac{B+k}{B}}\,,\quad z_1=z\sqrt{\frac{C+k}{C}}.$$

Se si tratta dei due paraboloidi confocali

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z\\[2mm] \dfrac{x_1^2}{p+k}+\dfrac{y_1^2}{q+k}=2z_1-k\,,\end{cases}$$

abbiamo invece

$$x_1=x\sqrt{\frac{p+k}{p}}\,,\quad y_1=y\sqrt{\frac{q+k}{q}}\,,\quad z_1=z+\frac{k}{2}.$$

6. Un'altra proprietà della corrispondenza fra i punti delle due falde focali S, S_1 risulta dal considerare quel sistema coniugato di S che si conserva coniugato quando S si applica sulla quadrica Q, e l'analogo sistema coniugato permanente di S_1 nell'applicabilità sopra Q stessa. Si è visto che la corrispondenza fra S, S_1 conserva i sistemi coniugati; ma di più abbiamo il teorema:

Al sistema coniugato comune ad S *e alla quadrica applicabile* Q *corrisponde sopra* S_1 *il sistema coniugato comune ad* S_1, Q.

Per teoremi dovuti a Darboux e Servant, questo sistema coniugato comune sopra S, come sopra S_1, è un sistema *isotermo-coniugato* (eccettuato il caso che S, S_1 siano rigate).

Fermiamoci un momento a considerare cosa diventano i teoremi del numero precedente, e dell'attuale, nel caso particolare delle superficie a curvatura costante. La legge di applicabilità, data dalla affinità di Ivory, si converte nella relazione d'applicabilità delle due falde di una congruenza pseudosferica, secondo la quale ogni punto F della prima falda S, applicando S sulla seconda falda S_1, si trasporta a distanza geodetica costante dal punto corrispondente F_1 di S_1 (¹).

Quanto all'altro teorema della conservazione dei sistemi coniugati permanenti nelle rispettive applicabilità di S, S_1 sopra Q, si muta quando Q diventa una sfera, nella proprietà della corrispondenza delle linee di curvatura sulle due falde della congruenza.

7. Ritorniamo alle trasformazioni generali B_k delle superficie applicabili sulla quadrica Q.

Per trovare effettivamente le ∞^1 trasformate S_1 abbiamo da integrare un'equazione di Riccati, della quale adunque basta conoscere una soluzione particolare per compiere l'integrazione con quadrature. Dopo ciò, siccome di ciascuna S_1 conosciamo già *una* trasformata, l'iniziale S, non occorrono più altro che quadrature per proseguire illimitatamente nelle nostre trasformazioni.

Ma anche qui, come per le superficie a curvatura costante, possiamo perfezionare ulteriormente il metodo e risparmiare le quadrature, appoggiandoci sul seguente teorema:

Teorema B). *Se da una superficie* S *applicabile sulla quadrica* Q *si sono dedotte due nuove superficie* S_1, S_2, *applicabili sulla medesima quadrica, mediante due trasformazioni* B_{k_1}, B_{k_2} *corrispondenti a due costanti* k_1, k_2 *differenti (ossia a due distinte quadriche* Q_1, Q_2 *del sistema confocale), esiste una quarta superficie* S' *della medesima natura, perfettamente determinata, che è legata alle due stesse* S_1, S_2 *da due altre trasformazioni* B'_{k_2}, B'_{k_1} *colle costanti* k_1, k_2 *permutate. Questa quarta super-*

(¹) V. le mie *Lezioni di geometria differenziale* (2ª edizione, t. II, pag. 409).

ficie S', *note che siano le tre* S, S_1, S_2, *si trova in termini finiti senza calcoli d'integrazione.*

Da questo teorema, che diciamo il *teorema di permutabilità*, segue che basta avere integrato completamente, per un valore arbitrario di k, la prima equazione di Riccati che si presenta nell'applicazione del metodo di trasformazione, e tutte le seguenti equazioni di Riccati saranno senz'altro insieme integrate, senza che più occorra alcuna quadratura.

8. Fra le deformate delle quadriche meritano particolare menzione le *deformate rigate*. Attualmente, per restare al caso reale, supporremo che la quadrica fondamentale Q sia essa stessa rigata e si tratti dunque o di un paraboloide iperbolico, o di un iperboloide ad una falda. In primo luogo abbiamo che, se la deformata S della quadrica Q è una rigata R, anche tutte le superficie trasformate S_1, per una qualunque B_k, saranno altrettante rigate R_1. La costruzione delle ∞^1 trasformate rigate R_1 di una rigata R, applicabile sopra Q, assume allora una forma particolarmente espressiva data dal teorema seguente:

Se la quadrica Q *rotola sopra una qualunque sua deformata rigata* R, *seco trasportando rigidamente connessa la quadrica confocale* Q_1, *le generatrici (dell'uno o dell'altro sistema) di* Q_1 *generano una congruenza* Γ, *entro cui esistono* ∞^1 *superficie rigate* R_1, *perfettamente determinate, ciascuna delle quali forma con* R *le due falde focali di una congruenza* W. *Queste nuove rigate* R_1 *sono alla loro volta applicabili sulla medesima quadrica* Q, *e danno le* ∞^1 *trasformate della* R *per la trasformazione* B_k *corrispondente alla quadrica confocale* Q_1.

Qui notiamo ancora tre casi particolari.

Se si fa coincidere Q_1 con Q, si deve prendere per congruenza Γ la congruenza (normale) delle tangenti a quelle geodetiche curvilinee di R che corrispondono alle generatrici di Q dell'altro sistema. In questo caso si ottengono le rigate R_1, associando quelle tangenti lungo le singole asintotiche curvilinee di R. E in effetto, per un teorema generale dovuto al dottore Chieffi [1], queste rigate R_1 sono applicabili sulla quadrica Q.

Un secondo caso particolare notevole si ottiene prendendo per Q un iperboloide (rigato) rotondo. Si sa allora che sopra ciascuna deformata rigata R di Q il circolo di gola dell'iperboloide diventa una curva di Bertrand. Le nostre trasformazioni diventano per le curve di Bertrand quelle trasformazioni che, trovate in un caso particolare da Demartres, furono poi considerate in generale da Razzaboni [2].

[1] *Sulle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda*, Giornale di matematiche, serie 2ª, t. 12 (v. n. 1).

[2] Cfr. la mia prima Memoria citata, §§ 22-24.

Supponiamo infine di ridurre la quadrica Q_1 ad un piano principale (n. 3); le sue generatrici diventano allora le tangenti della corrispondente conica focale e si ha il teorema: *Se la quadrica* Q *rotola sopra una sua deformata rigata* R, *le tangenti di una conica focale di* Q, *trasportata da* Q *nel rotolamento, generano una congruenza che contiene le* ∞^1 *trasformate rigate* R_1 *della* R *per quella* B_k *che corrisponde a ridurre la quadrica confocale* Q_1 *al piano (principale) della conica.*

9. Ritorniamo ancora alle trasformazioni B_k delle generali deformate S della quadrica Q che supporremo, come nel numero precedente, a generatrici reali affinchè siano reali le asintotiche sulle deformate S. Vogliamo segnalare alcune notevoli proprietà, dalle quali risulterà come le trasformazioni B_k possano anche riguardarsi quali trasformazioni di singole curve, cioè delle asintotiche delle superficie applicabili sulle quadriche.

Fissiamo sulla superficie iniziale S una qualunque sua asintotica a e, scelto un punto F di a, fissiamo ancora il segmento focale FF_1, che giacerà nel piano osculatore di a. Teniamo allora fissa la linea asintotica a ed il segmento FF_1 e deformiamo in modo continuo la superficie S attorno alla asintotica rigida a (1); quella trasformazione B_k della S che è individuata dal segmento fissato FF_1 cangierà la S, in ogni sua configurazione, in una determinata trasformata S_1. Abbiamo allora il teorema: *Se la superficie* S *si deforma attorno alla asintotica rigida* a, *resterà fissa altresì la asintotica corrispondente* a_1 *sulla superficie trasformata* S_1, *e questa si deformerà a sua volta attorno alla asintotica rigida* a_1.

La nuova curva a_1 viene così a dipendere unicamente dalla primitiva a, e dal segmento FF_1, fissato nel piano osculatore di a nel punto iniziale F. Ne segue appunto che possiamo risolvere le nostre trasformazioni di superficie in trasformazioni delle loro singole asintotiche, precisamente come S. Lie ha risoluto le trasformazioni delle superficie pseudosferiche in quelle delle curve a torsione costante che ne sono le linee asintotiche.

10. Dal teorema superiore deduciamo un'altra conseguenza importante. Fra le deformate della S che lasciano rigida la linea asintotica a ve ne sono due, perfettamente determinate, che convertono la S in una superficie rigata. Queste due rigate corrispondono ai due sistemi di generatrici di Q e si ottengono (pel teorema di Chieffi) conducendo nei punti della asintotica a le tangenti alle geodetiche di S trasformate delle generatrici dell'uno o dell'altro sistema di Q. Abbiamo dunque il teorema:

Se sulle due falde focali S, S_1 *di una delle nostre congruenze si considerano due asintotiche corrispondenti* a, a_1, *e nei punti di queste si*

(1) Si sa che le linee asintotiche di una superficie possiedono la proprietà di essere *linee di piegamento*, cioè intorno ad una di esse mantenuta rigida si può flettere la superficie. Queste flessioni con asintotica rigida dipendono da una funzione arbitraria.

tirano le tangenti alle geodetiche di S *trasformate delle generatrici dell'uno o dell'altro sistema di* Q, *le due rigate* R, R_1, *che si formano, sono nuovamente le due falde focali di una congruenza* W, *ed applicabili sulla quadrica* Q.

Con questa costruzione, note che siano le linee asintotiche delle due falde focali S, S_1, si deducono in termini finiti due serie di ∞^1 altre congruenze della medesima specie, con falde focali rigate.

È da notarsi che il teorema superiore vale ancora se le due falde focali S, S_1 sono esse stesse rigate, purchè la costruzione si faccia rispetto alle geodetiche corrispondenti a quelle generatrici di Q che hanno perduto sopra S, S_1 la loro forma rettilinea.

11. Le nostre trasformazioni B_k si applicano a tutte quelle superficie il quadrato del cui elemento lineare è riducibile al ds^2 di una quadrica reale od immaginaria. E, se pure ci limitiamo a considerare fra queste superficie soltanto le *reali*, ne abbiamo parecchie classi le cui quadriche corrispondenti sono immaginarie. Così p. es. esistono trasformazioni B_k reali per la classe di superficie reali applicabili sull'*ellisoide immaginario*.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0\,.$$

In particolare quando $a=b=c$, queste superficie sono le pseudosferiche di curvatura

$$K=-\frac{1}{a^2}\,,$$

e le corrispondenti B_k diventano le trasformazioni di Bäcklund.

Ma consideriamo ora particolarmente il caso che la quadrica fondamentale Q sia *reale*. Allora le trasformazioni reali B_k delle deformate reali di Q si ottengono assumendo per quadrica confocale Q_1 del n. 3 una quadrica rigata. Ne risulta che se la quadrica Q è essa stessa rigata, l'affinità di Ivory (n. 5) fa corrispondere ai punti reali di Q_1 punti reali di Q, e le due falde focali S, S_1 delle nostre congruenze sono in realtà applicabili l'una sull'altra, per le loro regioni reali. Quando invece la quadrica Q è a punti ellittici, la corrispondenza di Ivory trasforma la regione reale di Q_1 in una immaginaria di Q; i due elementi lineari di S, S_1 sono sempre analiticamente equivalenti, ma la regione reale di S corrisponde ad una ideale di S_1. Diremo nel primo caso che l'applicabilità di S sopra S_1 è *reale*, nel secondo *ideale*.

Abbiamo dunque: *Se la quadrica fondamentale* Q *è a punti iperbolici (paraboloide iperbolico, iperboloide ad una falda) l'applicabilità delle due falde focali* S, S_1 *di una delle nostre congruenze è reale; se invece* Q *è a punti ellittici (paraboloide ellittico, ellissoide, iperboloide a due falde) la loro applicabilità è soltanto ideale.*

In quest'ultimo caso, per ottenere dalla superficie iniziale S superficie derivate applicabili *realmente* sopra S, conviene eseguire un numero pari di trasformazioni.

Supponiamo ora in particolare che la quadrica Q sia rotonda. Nel sistema confocale determinato da Q vi sono effettive quadriche rigate solo quando Q è un iperboloide ad una falda o un ellissoide schiacciato, mentre per le altre tre forme rotonde (paraboloide, ellissoide allungato, iperboloide a due falde) le quadriche rigate del sistema confocale si riducono ai piani per l'asse e le trasformazioni reali corrispondenti spariscono. Ne risulta che: *per le quadriche rotonde (reali) si hanno trasformazioni* B_k *reali solo per le due forme dell'ellissoide schiacciato e dell'iperboloide ad una falda; per le altre tre forme le trasformazioni sono soltanto immaginarie.*

Questi risultati sono in perfetto accordo con quelli già da me stabiliti con ricerca diretta nelle due Memorie citate.

12. Veniamo da ultimo a parlare di un'altra trasformazione delle deformate delle quadriche, di natura ben diversa dalle trasformazioni B_k fin qui considerate; quest'altra trasformazione è involutoria ed assimilabile sotto molti rapporti alla *trasformazione di Hazzidakis* per le superficie a curvatura costante positiva.

Secondo quanto ho dimostrato in una mia Nota dell'aprile 1903, inserita in questi Rendiconti, ad una quadrica generale Q ne corrisponde un altra $\overline{Q}$, determinata a meno di un'omotetia, *coniugata in deformazione* della Q. Le due quadriche Q, $\overline{Q}$, che possono assumersi nello stesso sistema confocale, si corrispondono in una *proiettività* che conserva (oltre ai sistemi coniugati) le linee geodetiche. Ne segue (loc. cit.) che ad ogni sistema di linee asintotiche *virtuali* sopra Q corrisponde un analogo sistema sopra $\overline{Q}$, talchè ogni deformata S di Q ne individua una $\overline{S}$ di $\overline{Q}$, corrispondendosi ancora sopra S, $\overline{S}$ i sistemi coniugati e le geodetiche.

Nel passaggio dalla deformata S di Q all'altra deformata $\overline{S}$ di $\overline{Q}$ consiste la trasformazione involutoria che dobbiamo ora considerare, e che indichiamo col simbolo H; le due superficie S, $\overline{S}$ si diranno anche *coniugate in deformazione.*

La trasformazione involutoria H delle deformate delle quadriche ha a comune colle trasformazioni B_k le proprietà segnalate ai nn. 9 e 10; e cioè:

1°. *Se la superficie* S *si deforma attorno ad una sua asintotica rigida* a, *la sua coniugata in deformazione* $\overline{S}$ *si deforma similmente attorno alla corrispondente asintotica rigida* $\overline{a}$.

2°. *Se alle due superficie* S, $\overline{S}$ *coniugate in deformazione si circoscrivono lungo due linee asintotiche corrispondenti* a, $\overline{a}$ *le rigate* R, $\overline{R}$

formate dalle tangenti alle deformate delle rispettive generatrici delle quadriche Q, $\overline{Q}$, *queste due rigate* R, $\overline{R}$ *sono nuovamente coniugate in deformazione.*

Ma la proprietà più interessante della trasformazione involutoria H si ottiene dal paragone colle trasformazioni B_k ed è data dal teorema seguente, che dimostra in sostanza la *permutabilità* della trasformazione H colle B_k:

Se S, S_1 *sono due deformate della quadrica* Q, *trasformate l'una dall'altra per una* B_k, *le due loro coniugate in deformazione* $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ *possono collocarsi in tale posizione dello spazio da formare, alla loro volta, le due falde focali di una congruenza* W, *onde* $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ *sono trasformate l'una dell'altra per una* $B_{\overline{k}}$. *La seconda congruenza si deduce dalla prima semplicemente conducendo pei punti di* $\overline{S}$ *le tangenti nelle direzioni corrispondenti a quelle dei raggi della congruenza primitiva.*

A causa di queste proprietà, quando si applicano le trasformazioni B_k alle deformate S delle quadriche conviene sempre associare alla S la coniugata in deformazione $\overline{S}$, poichè dalle trasformazioni dell' una si hanno senz'altro le trasformazioni dell'altra, e le nuove superficie sono ancora coniugate in deformazione. Così si passa dalle trasformazioni delle superficie applicabili sopra un iperboloide rigato a quelle delle deformate di un altro iperboloide rigato, e similmente da quelle relative ad un ellissoide a quelle delle deformate dell' iperboloide a due falde coniugato in deformazione.

Da ultimo osserverò che si possono considerare coppie S, $\overline{S}$ di superficie coniugate in deformazione non solo appartenenti allo stesso spazio euclideo, ma anche immerse l' una in uno spazio di curvatura costante, l'altra in un altro spazio di curvatura ancora costante, ma differente. In particolare alle deformate delle quadriche nello spazio euclideo sono coniugate in deformazione, nello spazio di curvatura costante positiva o negativa, ancora delle superficie applicabili su quadriche di questi spazî. E siccome i teoremi superiori continuano sempre a sussistere, ne risulta che: *la nostra teoria delle trasformazioni per le superficie applicabili sulle quadriche nello spazio euclideo vale più in generale per le deformate delle quadriche negli spazî di curvatura costante.*

Astronomia. — *Osservazioni della nuova cometa 1907 b Mellish fatte all'equatoriale di 37 cm. del R. Osservatorio al Collegio Romano.* Nota del Socio E. MILLOSEVICH.

La cometa fu scoperta a Madison il 14 aprile. L'astro è una debole nebulosità con accenno di condensazione nucleare. Le osservazioni al micrometro filare furono estremamente difficili. Oggidì non conosco in Europa