ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Sopra la configurazione di Kummer e il suo intervento nella teoria delle cubiche gobbe.* Nota di Luigi Berzolari, presentata dal Socio C. Segre.

Malgrado i molteplici punti di vista dai quali è stata studiata la configurazione di Kummer, ritengo non privo d'interesse farne conoscere la seguente semplicissima costruzione geometrica, dalla quale si deduce pressochè immediatamente un notevole teorema, che stabilisce uno stretto legame, a quanto sembra non ancora osservato, tra quella configurazione e la teoria delle cubiche gobbe [1].

1. Siano $u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3$ tre coppie di generatrici, a due a due armoniche, di una rigata quadrica R, appartenente ad una superficie S di 2° ordine. Prese come assi, esse individuano tre involuzioni rigate I_1, I_2, I_3, di cui ciascuna è il prodotto delle altre due (eseguito in un ordine qualunque); di guisa che si ottiene un'involuzione Ω di 4° ordine, i cui ∞^3 gruppi son formati dai singoli punti dello spazio coi loro coniugati in I_1, I_2, I_3. *I punti di un gruppo sono vertici d'un tetraedro autoreciproco rispetto ad* S, a meno che non giacciano tutti sopra una generatrice della rigata trasversale di R.

Dicansi A_1, A_2, A_3, A_4 i punti d'un gruppo generico di Ω, in modo che A_1, A_2, A_3 siano i coniugati di A_4 in I_1, I_2, I_3, epperò A_2 e A_3 coniugati tra loro in I_1, A_3 e A_1 in I_2, A_1 e A_2 in I_3. Se a formare similmente un secondo gruppo $B_1 B_2 B_3 B_4$ si parte da un punto B_4 del piano $A_1 A_2 A_3$, *i due tetraedri* $A_1 \ldots A_4$ *e* $B_1 \ldots B_4$ *risultano di Möbius.* Invero le rimanenti facce $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_1 A_4$, $A_1 A_2 A_4$ del primo, essendo coniugate alla $A_1 A_2 A_3$ risp. in I_1, I_2, I_3, contengono ordinatamente i vertici B_1, B_2, B_3 del secondo; che poi questo sia alla sua volta circoscritto al primo nel modo anzidetto, si riconosce trasformando l'uno e l'altro con la polarità rispetto ad S.

Costruendo allora di Ω un terzo gruppo $C_1 C_2 C_3 C_4$, dove C_4 è un punto generico della retta comune ai piani $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, e poi un quarto gruppo $D_1 D_2 D_3 D_4$, in cui D_4 è l'intersezione dei piani $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$, *i vertici e le facce dei quattro tetraedri risultanti* (A), (B), (C), (D) *sono gli elementi d'una configurazione di Kummer.* Basta infatti [2] osservare

[1] In un prossimo lavoro mostrerò come lo stesso teorema sussista, più generalmente, per le curve gobbe razionali *d'ordine dispari*, dotate di quattro punti d'iperosculazione.

[2] Cfr. Ciani, *Sopra la configurazione di Kummer*, Giorn. di mat., *34* (1896), pag. 177; *37* (1899), pag. 62; Martinetti, *Sopra la configurazione di Kummer*, ibid., *35* (1896), pag. 235.

che per ognuno dei 16 punti passano 6 dei 16 piani, che in ciascuno di questi piani stanno 6 di quei punti, e che nessuna retta appartiene a più che due di tali punti o di tali piani [1].

S' indicano subito i sei complessi lineari, a due a due in involuzione, dai quali, nella nota maniera dovuta al sig. Klein, proviene la nostra configurazione. Tre, che si tagliano nella rigata trasversale di R, dipendono unicamente dalle coppie di rette u_i, v_i, e non dai punti A_i, B_i, C_i, D_i, e sono i complessi G_1, G_2, G_3 relativi ai sistemi nulli N_1, N_2, N_3 individuati dalla schiera R riferita involutoriamente a sè stessa risp. con le rette doppie u_1 e v_1, u_2 e v_2, u_3 e v_3, cioè quelli costituiti dalle rette che si appoggiano alle coppie di generatrici di R coniugate in tali involuzioni. Gli altri tre, G'_1, G'_2, G'_3, aventi in comune la rigata R, sono quelli rispetto a cui, per una nota proprietà, son tra loro reciproci risp. i tetraedri (B) e (C), (C) e (A), (A) e (B), e di conseguenza anche risp. (A) e (D), (B) e (D), (C) e (D). Ognuno di questi tetraedri, ossia insomma il tetraedro che ha i vertici nei punti d'un gruppo qualunque di Ω, è invece mutato in sè da N_1, N_2, N_3; di più si ha:

$$N_i N_j \equiv N_j N_i \equiv I_k \qquad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Del resto, anche G_1, G_2, G_3 possono ottenersi da coppie di tetraedri di Möbius formati con elementi della configurazione: G_1 da ciascuna delle coppie

$$\begin{matrix} A_1A_4B_2B_3 & A_1A_4C_2C_3 & A_1A_4D_2D_3 & B_2B_3C_1C_4 & B_2B_3D_1D_4 & C_2C_3D_1D_4 \\ B_1B_4A_2A_3\,' & C_1C_4A_2A_3\,' & D_1D_4A_2A_3\,' & C_2C_3B_1B_4\,' & D_2D_3B_1B_4\,' & D_2D_3C_1C_4\,' \end{matrix}$$

G_2 e G_3 dalle coppie che si deducono da queste con le permutazioni circolari degli indici 1, 2, 3.

2. Data, inversamente, una configurazione di Kummer, i suoi elementi si possono distribuire (Schröter, loc. cit.; Sturm, loc. cit.), in 20 modi diversi, nei vertici e nelle facce di una quaterna di tetraedri $(A) \equiv A_1 \ldots A_4$, $(B) \equiv B_1 \ldots B_4$, $(C) \equiv C_1 \ldots C_4$, $(D) \equiv D_1 \ldots D_4$, autoreciproci rispetto ad una quadrica S, e di cui due qualunque sono di Möbius nell'ordine scritto. Restano così determinati tre complessi lineari G'_1, G'_2, G'_3, a due a due in involuzione, aventi a comune le generatrici d'una schiera R di S, e tali che rispetto ad essi sono ordinatamente tra loro reciproci (B) e (C), (A) e (D);

[1] I tetraedri qui costruiti son di quelli che diconsi « di Rosenhain »; nel lavoro di H. Weber, *Ueber die Kummersche Fläche* ecc., Journ. für Math., *84* (1877), pag. 332, sono studiati col nome di tetraedri « erster Art ». Quaterne di tali tetraedri che, come quella del testo, comprendano coi loro vertici e con le loro facce tutti gli elementi della configurazione, furono considerate per la prima volta dallo Schröter, *Ueber das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummersche Configuration*, Journ. für Math., *100* (1886), pag. 231. Cfr. pure R. Sturm, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie*, Bd. 2, Leipzig 1893, pag. 130 e seg.

(C) e (A), (B) e (D); (A) e (B), (C) e (D). Dicendo N'_1, N'_2, N'_3 le relative polarità nulle (a due a due permutabili), il prodotto di due qualunque è altresì il prodotto della rimanente per la polarità rispetto ad S, ed è un'involuzione rigata, nella quale son tra loro coniugati i vertici di due dei quattro dati tetraedri ed anche i vertici degli altri due; così nell'involuzione $N'_2 N'_3 \equiv N'_3 N'_2$ son coniugati ai punti $B_1, \ldots, B_4$ i punti $C_1, \ldots, C_4$, ed ai punti $A_1, \ldots, A_4$ i punti $D_1, \ldots, D_4$. Gli assi delle tre involuzioni sono tre coppie, a due a due armoniche, di generatrici dell'altra schiera di S ([1]).

Siano $u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3$ le generatrici di R passanti per i punti d'incontro di S con le rette $A_1 A_4, A_2 A_4, A_3 A_4$, e dicansi I_1, I_2, I_3 le involuzioni rigate aventi per assi queste tre coppie di rette. Anche la $A_2 A_3$, essendo reciproca di $A_1 A_4$ rispetto ad S, taglia u_1 e v_1, epperò A_2 e A_3, al pari di A_1 e A_4, sono coniugati in I_1; similmente A_3 e A_1, come A_2 e A_4, son coniugati in I_2, e A_1, A_2, come A_3, A_4, in I_3. Se poi si chiamano P e Q le intersezioni di u_1 con $A_2 A_3$ e di v_1 con $A_1 A_4$, la retta PQ appartiene ad S, quindi taglia u_2 e v_2. Perciò il coniugato di P in I_2, dovendo giacere sulla PQ e sulla coniugata di $A_2 A_3$, che è $A_1 A_4$, sarà Q. Si conclude che nella schiera R le coppie di generatrici $u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3$ si separano a due a due armonicamente, epperò individuano, nel modo che si è detto al n° 1, un'involuzione biquadratica Ω, di cui un gruppo è $A_1 A_2 A_3 A_4$. Altri tre gruppi son formati dai vertici di (B), (C), (D), giacchè, appoggiandosi gli spigoli di (A) ordinatamente alle $u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3$, lo stesso avviene degli spigoli degli altri tre tedraedri corrispondenti a quelli nelle involuzioni rigate $N'_2 N'_3, N'_3 N'_1, N'_1 N'_2$. *Una data configurazione di Kummer può dunque generarsi, in 20 modi diversi, con la costruzione del n. 1.*

3. Sia Γ^3 una cubica gobba, e scelti su essa quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4, siano $U_1, V_1; U_2, V_2; U_3, V_3$ le coppie (a due a due armoniche, su Γ^3) dei punti doppî delle tre involuzioni individuate sulla curva risp. dalle coppie A_2, A_3 ed A_1, A_4; A_3, A_1 ed A_2, A_4; A_1, A_2 ed A_3, A_4 di punti coniugati. Le rette $U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3$ sono le generatrici che a due a due hanno in comune le tre schiere rigate composte di corde di Γ^3 e risp. determinate dalle corde congiungenti le dette coppie di punti coniugati. Chiamando R la schiera che ha per direttrici le rette stesse, le sue coppie di generatrici $u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3$ uscenti dalle coppie di punti $U_1, V_1; U_2, V_2; U_3, V_3$ sono a due a due armoniche, e, prese come assi, individuano tre involuzioni rigate I_1, I_2, I_3, due qualunque delle quali hanno per prodotto la terza, mentre ciascuna trasforma la cubica in sè. Ne risulta, come al n° 1, un'involuzione Ω del 4° ordine: la quale, nel caso presente, è così fatta che se un suo gruppo ha su Γ^3 uno de' suoi punti, vi ha pure i tre punti rimanenti. La cubica contiene pertanto

([1]) Per le proprietà qui usate di due tetraedri di Möbius cfr. Caporali e Del Pezzo, *Introduzione alla teoria dello spazio rigato* (1885), nelle *Memorie di geometria* del Caporali, Napoli 1888, pag. 270 (§ X). Cfr. pure Sturm, loc. cit., Bd. 1, pag. 70.

∞^1 gruppi di Ω, i quali costituiscono l'involuzione (sizigetica) Ω' determinata sulla curva stessa dal gruppo $A_1 A_2 A_3 A_4$ e dal suo Hessiano [1].

Un gruppo di Ω è $A_1 A_2 A_3 A_4$. Altri tre si hanno, evidentemente, nei vertici $B_1, \ldots, B_4$; $C_1, \ldots, C_4$; $D_1, \ldots, D_4$ dei seguenti altri tetraedri: quello, (B), che ha per facce i piani osculatori in $A_1, \ldots, A_4$; quello, (C), che ha per vertici le intersezioni delle tangenti nei vertici del primo, (A), con le facce risp. opposte; quello, (D), che ha per facce i piani che dai vertici di (B) proiettano le tangenti situate nelle facce risp. opposte. Ora, per notissime proprietà, questi quattro tetraedri sono a due a due di Möbius; segue quindi dal n° 1 che *i loro vertici e le loro facce formano una configurazione di Kummer.*

Una tal configurazione — pur non essendo, generalmente, nè tetraedroidale nè degenere — non è però la più generale possibile: essa possiede infatti un sol modulo, quello della quaterna di punti $A_1 A_2 A_3 A_4$ considerati sulla cubica gobba, mentre tre sono i moduli della configurazione generale di Kummer. L'osservazione del resto risulterà confermata per altra via fra poco (n° 5).

4. Mantenendo per i sei complessi lineari a due a due involutorî, da cui la nostra configurazione può pensarsi originata, le notazioni del n° 1, è chiaro che G_k contiene le tangenti di Γ^3 nei punti doppî delle involuzioni subordinate sulla cubica da I_i e I_j $(i, j, k = 1, 2, 3)$, cioè nei punti U_i, V_i, U_j, V_j.

Il complesso G_3', che scambia tra loro (A) e (B), ed anche (C) e (D), non è altro che quello relativo al sistema nullo determinato da Γ^3.

Quanto a G_1', poichè scambia tra loro (B) e (C) e pure tra loro (A) e (D), contiene le rette $A_1 C_1, \ldots, A_4 C_4$, tangenti a Γ^3 nei punti $A_1, \ldots, A_4$; e poichè d'altra parte è in involuzione con G_3', esso coincide col complesso che fu per la prima volta considerato dal sig. Sturm [2] come luogo delle coppie di quadrisecanti delle tangenti condotte a Γ^3 nelle quaterne di punti apolari ad $A_1 A_2 A_3 A_4$. La detta proprietà, che rispetto a G_1' sono reciproci (A) e (D), come pure (B) e (C), equivale perfettamente alle costruzioni date dal sig. Sturm (Mem. citata, n° 26) per i piani focali di $A_1, \ldots, A_4$ e per i fuochi dei piani osculatori a Γ^3 in questi punti rispetto a G_1'.

Infine G_2', essendo in involuzione con G_1' e con G_3', proviene con la generazione dello Sturm da una quaterna di punti di Γ^3 apolare ad $A_1, \ldots, A_4$;

(1) In relazione con quest'argomento vedasi, anche per le relative notizie bibliografiche, il mio lavoro *Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, vol. 5 (1891), pp. 9 e 33, dove sono date notevoli proprietà dell'iperboloide su cui è tracciata la schiera R.

(2) *Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve*, Journ. für Math., *86* (1878), pag. 116 (n. 23 e seg.); cfr. pure *Liniengeometrie*, Bd. 1, pag. 326.

esso contiene perciò le tangenti di Γ^3 nei quattro punti che formano il gruppo dell'involuzione sizigetica Ω' apolare al gruppo $A_1 \ldots A_4$ (¹).

5. Che i sei punti della configurazione situati in un piano (della medesima), per es. i punti $A_4, C_4, D_4, B_1, B_2, B_3$, appartengano ad una conica (e dualmente per i sei piani concorrenti in un suo punto), si deduce (con noto ed ovvio ragionamento, valido per ogni configurazione di Kummer) da ciò, che i triangoli $A_4 C_4 D_4$ e $B_1 B_2 B_3$ sono autoreciproci rispetto alla conica secondo cui il loro piano taglia la quadrica contenente la schiera R. Ma nel caso attuale le stesse 16 coniche possono anche definirsi in altro modo, che merita d'essere rilevato. Riferiamoci, per es., ancora al piano precedente, osculatore a Γ^3 in A_4. Le rette $B_2 B_3$, $B_3 B_1$, $B_1 B_2$ sono le sue intersezioni coi piani osculatori risp. in A_1, A_2, A_3, mentre la retta $A_4 C_4$ tocca Γ^3 in A_4. Quest'ultima incontra dunque le prime in tre punti A'_1, A'_2, A'_3 che sono le intersezioni della stessa con quei tre piani osculatori; epperò la punteggiata $A'_1 A'_2 A'_3 A_4$, posta sulla tangente $A_4 C_4$, è proiettiva alla punteggiata $A_1 A_2 A_3 A_4$ di Γ^3. Ma la prima è proiettiva al fascio di rette $A_4(B_1 B_2 B_3 C_4)$, onde si conclude che *la conica considerata è, sul piano osculatore in* A_4, *il luogo d'un punto dal quale i punti* B_1, B_2, B_3, C_4 *sono proiettati secondo un gruppo proiettivo al gruppo* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *della cubica gobba.*

Trasformando successivamente il precedente fascio di rette con le polarità rispetto ai complessi G'_1, G'_2, G'_1, risulta che son pure proiettivi ad $A_1 A_2 A_3 A_4$ (su Γ^3) i fasci $C_4(D_1 D_2 D_3 A_4)$, $B_4(A_1 A_2 A_3 D_4)$, $D_4(C_1 C_2 C_3 B_4)$, il che definisce le coniche della configurazione situate nelle facce dei tetraedri (D), (A), (C) (²).

6. Le proprietà degli ultimi tre n[i] soffrono eccezione quando i punti A_1, A_2, A_3, A_4 formino su Γ^3 un gruppo equianarmonico. È noto infatti (³)

(¹) Se in una qualsiasi determinazione parametrica scelta su Γ^3 è f la forma binaria biquadratica che ha per radici i parametri dei punti $A_1, \ldots, A_4$, e si denotano, come di solito, con H il suo Hessiano e con i e j i suoi invarianti quadratico e cubico, il detto gruppo di Ω' ha per parametri le radici del covariante $jf - iH$. Cfr. il mio citato lavoro *Intorno alla rappresentazione* ecc.

(²) Ricorrendo alla rappresentazione parametrica delle coordinate dei punti di Γ^3, si trova senza difficoltà:

$$(B_1 B_2 B_3 A_4) = \Delta \frac{\Delta - 2}{1 - 2\Delta}, \qquad (B_1 B_2 B_3 D_4) = \Delta^3 \frac{\Delta - 2}{1 - 2\Delta},$$

dove i birapporti si riferiscono ai punti considerati sulla conica a cui tutti appartengono, e Δ denota il birapporto dei punti $A_1, \ldots, A_4$ pensati come esistenti su Γ^3. Quando siasi descritta la conica (nel modo indicato, ossia partendo dai punti B_1, B_2, B_3, C_4), queste formole fissano sulla medesima le posizioni degli altri due punti A_4, D_4. Lo stesso dicasi delle altre 15 coniche.

(³) V., anche per proprietà più generali, la mia Nota *Sulle curve d'ordine n dello spazio ad n dimensioni*. Rend. del R. Istituto Lombardo, (2) *36* (1903). pag. 791; oppure che i punti $C_1, \ldots, C_4$ giacciono allora sopra una retta, appartenente al complesso lineare G_3' individuato da Γ^3, e per la quale passano quindi pure i piani che da $B_1, \ldots, B_4$ proiettano le tangenti nei punti $A_1, \ldots, A_4$ (quelli cioè che nel caso generale sono le facce del tetraedro (D)). D'altra parte, i complessi G_1', G_2' vengono a coincidere col complesso speciale che ha per asse la retta precedente.

Esaminiamo invece ciò che avviene quando $A_1, \ldots, A_4$ siano armonici su Γ^3. Posto, per es., che A_1 e A_4 separino armonicamente A_2 e A_3, le rette $A_1 A_4$, $A_2 A_3$, $B_1 B_4$, $B_2 B_3$, che in ogni caso son comuni ai complessi G_2 e G_3, appartengono altresì a G_1': infatti delle tangenti di Γ^3 appoggiate, per es., ad $A_1 A_4$, due hanno il punto di contatto in A_1 e due in A_4, e il gruppo formato dai punti A_1 e A_4 contati due volte è apolare ad $A_1 \ldots A_4$. Ne segue che su quelle quattro rette stanno risp. anche le coppie di punti $D_2 D_3$, $D_1 D_4$, $C_2 C_3$, $C_1 C_4$, separate dalle precedenti armonicamente. Di più, tanto le rette $A_1 A_4$ e $A_2 A_3$, quanto le $B_1 B_4$ e $B_2 B_3$ sono coniugate rispetto a G_1; perciò le $A_1 D_1, \ldots, A_4 D_4$, che sempre son comuni ai complessi G_2' e G_3', nel caso attuale stanno pure in G_1, e contengono quindi ancora risp. le coppie di punti $B_4 C_4$, $B_3 C_3$, $B_2 C_2$, $B_1 C_1$ [1]. In conclusione, i 16 punti della configurazione sono, nel caso presente, le intersezioni di 4 generatrici della rigata comune ai complessi G_2, G_3, G_1' con 4 generatrici della rigata trasversale (comune a G_2', G_3', G_1); e i 16 piani della medesima son quelli determinati dalle prime con le seconde generatrici. La quadrica su cui son tracciate le due schiere — e che, contata due volte, costituisce la superficie di Kummer determinata dalla configurazione — contenendo, come generatrici della seconda schiera, le rette u_1, v_1, incontra Γ^3, fuori dei punti $A_1, \ldots, A_4$, nei punti U_1, V_1 che separano armonicamente le coppie $A_1 A_4$ e $A_2 A_3$.

l'altra *Alcuni teoremi sulle curve razionali di uno spazio ad r dimensioni dotate di $r+1$ punti d'iperosculazione*, Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 22 (1906), pag. 214 (n. 4).

(1) Si potrebbe dimostrare che i birapporti $(B_4 C_4 A_1 D_1), \ldots, (B_1 C_1 A_4 D_4)$ hanno il valore $\frac{1}{4}$.