ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Fisica-matematica. — *La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica-matematica.* Nota del prof. R. MARCOLONGO, presentata dal Socio V. CERRUTI.

L'importanza dello studio di alcune equazioni funzionali nella teoria dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, è stata notata, or sono alcuni anni, dai sigg. E. e F. Cosserat [1]. La nuova e importantissima risoluzione delle equazioni e dei sistemi di equazioni integrali ottenuta dal sig. Fredholm [2], che ha già avute notevolissime applicazioni nella teoria del potenziale e in analisi, doveva naturalmente promuovere gli studi già iniziati dai sigg. Cosserat e permettere inoltre di stabilire, con minor difficoltà, i teoremi di esistenza per i problemi di equilibrio elastico.

Il sig. Fredholm [3] ed il prof. Lauricella [4] si sono occupati di ridurre il problema dell'equilibrio, quando al contorno sono fissati gli spostamenti, ad un sistema di equazioni integrali del tipo generale considerato appunto nella teoria del sig. Fredholm.

Non credo inutile esporre anzitutto in altro modo una tale riduzione.

Supponiamo eliminate le forze di massa e quindi ridotte le equazioni di equilibrio alla forma

$$(1)\qquad \Delta_2 u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0\ ,\quad \Delta_2 v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0\ ,\quad \Delta_2 w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0\,.$$

È noto che, quando sono dati i valori al contorno delle funzioni incognite u, v, w, il sistema (1) ammette al più una soluzione, purchè

$$-1 < k < +\infty\,;$$

cioè, rammentando la relazione che intercede tra k e la costante $\varkappa$ di Poisson, per ogni valore di $\varkappa$ non appartenente all'intervallo: $\frac{1}{2}, 1$.

(1) *Sur une application des fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité.* [Comptes rendus de l'Académie d. Sciences de Paris; t. 133, 2e sem. 1901, pp. 210-213].

(2) Ci riferiamo sempre alla Memoria: *Sur une classe d'équations fonctionnelles* [Acta math. 27, pp. 365-390, 1903]. Si può consultare una estesa bibliografia dell'argomento nel recente lavoro del sig. H. Bateman: *The Theory of Integral Equations* [Proceed. of the London mathem. Society. Sec. ser., vol. 4, pp. 90-115, 1907].

(3) *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité* [Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, utgifvet af K. Svenska Vetenkapsakademien i Stockholm. B. 2, Häfte 3-4, 1905].

(4) *Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi* [Rend. R. Acc. d. Lincei, aprile 1906]. Vedi anche le Note del giugno e luglio stesso anno.

Partendo da noti integrali particolari delle (1), assegnati dal prof. Cerruti, si deduce agevolmente che le funzioni

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \lambda r\cos(rn)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\ ,\ -\lambda r\cos(rn)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\ ,\ -\lambda r\cos(rn)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\ ,$$

e le altre due terne dedotte con permutazioni circolari, soddisfano alle (1).

Indichiamo qui con r la distanza di un punto qualunque (x, y, z) da un punto (ξ, η, ζ) del contorno σ del corpo; con n la normale interna e infine:

$$\lambda = \frac{k}{k+2}$$

è precisamente la costante che figura nei recenti lavori del sig. Korn.

Rappresentiamo con $\varphi(\sigma), \psi(\sigma), \chi(\sigma)$ tre funzioni qualunque finite e continue dei punti di σ; se poniamo

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi}\int \varphi(\sigma)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma\, - \\ &- \frac{\lambda}{2\pi}\int r\cos(rn)\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\varphi(\sigma) + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\psi(\sigma) + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\chi(\sigma)\right)d\sigma \end{aligned} \tag{2}$$

e due formule analoghe per v e w, otterremo ancora un sistema di soluzioni delle (1).

Consideriamo anzitutto i valori di u, v, w nei punti i interni a σ, e accenniamo rispettivamente con U_i e U'_i il primo ed il secondo integrale della prima delle (2).

U_i rappresenta la funzione potenziale di un doppio strato di σ col momento continuo $\frac{1}{2\pi}\varphi(\sigma)$. Se facciamo tendere il punto i ad un punto s del contorno, sappiamo che

$$U_{is} = \varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int \varphi(\sigma)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma\,;$$

l'integrale a secondo membro esprime il valore che U_i prende nel punto s; in altre parole, r rappresenta ora la distanza del punto s da un altro punto σ entrambi appartenenti al contorno. Questa relazione, nella ipotesi della continuità di $\varphi(\sigma)$, vale, com'è noto, per condizioni molto generali sul contorno σ. Ma, per quanto dovremo dire tra poco, noi vogliamo supporre che il contorno σ soddisfi alle condizioni del Liapunoff [1], o a quelle alquanto più restrittive e nettamente enunciate dal sig. E. R. Neumann [2].

L'integrale a secondo membro, sempre proprio, rappresenta una funzione continua dei punti di σ e la funzione che figura sotto vincolo integrale, col tendere di σ ad s diventa infinita come $\frac{1}{r}$. Basta rammentare che [3]

$$\left|\frac{\cos(rn)}{r^2}\right| \leq \frac{1}{2\beta_g},$$

dove β_g è una costante finita e diversa da zero.

Consideriamo la funzione U_i. È agevole convincersi che essa è continua anche quando i tende ad s. Infatti è:

$$r\cos(rn)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = \left[3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - 1\right]\frac{d\frac{1}{r}}{dn}, \quad r\cos(rn)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn};$$

e si può scrivere:

$$\int r\cos(rn)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\varphi(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= \int\left[3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - 1\right][\varphi(\sigma) - \varphi(s)]\,d\sigma + \varphi(s)\int\left[3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - 1\right]d\sigma .$$

L'ultimo integrale è nullo, qualunque sia la posizione del punto i anche su σ; e del primo si dimostra subito la continuità [4]. Lo stesso può ripetersi per gli altri integrali di U'_i, perchè è pure

$$\int\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma = 0$$

qualunque sia la posizione di i.

(1) *Sur quelques questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* [Journ. de mathém. Vol. 4 (5) pp. 241-311; 1898].

(2) *Studien ü. die Methoden von C. Neumann u. G. Robin zur Lösung d. beiden Randwertaufgaben d. Potentialtheorie* [Preisschriften gekrönt u. herausgeg. v. den fürst. Jablonowki' schen Gesell. z. Leipzig, 1905, pp. 1-3].

(3) E. R. Neumann, oper. cit., pag. 5.

(4) Basta ripetere la dimostrazione di C. Neumann: *Ueb. die Methode des arith. Mittels* [Abhand. d. mathem.-phys. Classe der K. sächsischen Gesell. d. Wiss. zu Leipzig Bd. 13, pp. 707-820, 1887].

Se dunque facciamo tendere i ad s e diciamo $u(s)$ il limite di u_i, otteremo:

$$(3)\qquad \begin{aligned} u(s) &= \varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int \varphi(\sigma)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \\ &- \frac{\lambda}{2\pi}\int r\cos(rn)\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\varphi(\sigma) + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\psi(\sigma) + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\chi(\sigma)\right)d\sigma \end{aligned}$$

e due analoghe per $v(s)$ e $w(s)$.

Ecco dunque stabilito un sistema di equazioni integrali del tipo del sig. Fredholm, poichè le varie funzioni che moltiplicano le incognite sotto vincolo integrale, col tendere di σ ad s diventano infinite solamente come $\frac{1}{r}$. Se i valori $u(s)$, $v(s)$, $w(s)$ sono gli spostamenti assegnati al contorno, risolvendo il sistema (3) e poscia sostituendo i valori trovati per φ, ψ, χ in (2), avremo una soluzione del problema proposto.

Le φ,... sono funzioni meromorfe di λ, purchè il determinante dell'unica equazione integrale, a cui si riconduce il sistema (3) col metodo del sig. Fredholm, non sia identicamente nullo; chè in tal caso il sistema o non avrebbe soluzione o ne avrebbe infinite, qualunque sia λ. Ora $\lambda = 0$ non è un valore eccezionale per (3), come vedremo; e per tal valore il sistema assume la forma semplicissima

$$u(s) = \varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int \varphi(\sigma)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma\,,\ \text{ecc.},$$

che ammette sempre una e una sola soluzione; infatti è noto che la corrispondente equazione omogenea ha la sola soluzione $\varphi(s) = 0$ [1]. Dunque è impossibile che il determinante sia nullo e il sistema (3) ammette sempre una soluzione e una sola, per k soddisfacente alla condizione posta in principio.

Lo stesso metodo è applicabile alla risoluzione del problema elastico *esterno*, cioè alla integrazione di (1) nello spazio esterno e alla superficie σ. Basterà considerare (2) in un punto esterno e poscia, come prima, passare al limite; troveremo il sistema integrale

$$(4)\qquad \begin{aligned} u(s) &= -\,\varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int \varphi(\sigma)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \\ &- \frac{\lambda}{2\pi}\int r\cos(rn)\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\varphi(\sigma) + \cdots\right)d\sigma\,. \end{aligned}$$

[1] È in fondo il cosidetto teorema della *costanza del momento di un doppio strato* del signor E. R. Neumann, oper. cit., pag. 51. V. anche la seconda delle note citate del sig. Fredholm.

Il sistema omogeneo corrispondente ammette la soluzione evidente $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$, $\chi = \text{cost.}$, e lo stesso dicasi pure della equazione omogenea risultante. Il determinante dell'equazione risultante è dunque identicamente nullo; supponiamo del pari che siano nulli i suoi minori fino a quello di ordine m; allora il sistema omogeneo ammetterebbe m soluzioni indipendenti per qualunque valore di λ (che non sia eccezionale). Ma per $\lambda = 0$ il sistema si riduce a

$$\varphi(s) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\sigma) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma, \text{ecc.},$$

che ammette la sola soluzione $\varphi = \text{cost.}$, ecc: dunque anche il sistema omogeneo relativo a (4) ammetterà la soluzione unica assegnata [1].

Perchè in tal caso (4) ammetta soluzione, le $u(s)$ ... debbono soddisfare ad una relazione. Dovremo infatti considerare il sistema *aggiunto* o *associato* al sistema omogeneo di (4), che ammetterà pure una sola soluzione Φ, Ψ, X (diversa da quella del sistema, eccetto in casi particolari, cerchio-sfera). La relazione da essere soddisfatta è la seguente:

$$\int [u(\sigma)\, \Phi(\sigma) + \cdots]\, d\sigma = 0\,.$$

Se questa non è soddisfatta si procede nel modo indicato dal prof. Lauricella [2].

Nel caso di un suolo elastico isotropo, la risoluzione di (3) è immediata.

Infatti essendo r la distanza tra due punti s e σ del piano limite, $r\cos(rn)$ e $\dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}$ sono nulli; quindi

$$u(s) = \varphi(s) \quad , \quad v(s) = \psi(s) \quad , \quad w(s) = \chi(s)\,.$$

Sostituendo questi valori nelle (2) si ottengono le formule risolutive; e se in particolare il piano limite è $z = 0$ e si chiamano x, y, z le coordinate del punto in cui si vuol calcolare la deformazione, con facili e rapide trasformazioni si riottengono le formule del Cerruti [3].

(1) E. R. Neumann, oper. cit., pag. 50.

(2) Rend. R. Acc. d. Lincei, giugno 1906.

(3) Un fatto quasi analogo accade quando si voglia risolvere col metodo del Fredholm il problema (interno o esterno) di Dirichlet pel cerchio. In tal caso l'applicazione delle formule di Fredholm conduce alla ben nota formula risolutiva con speditezza ed eleganza.

In questo caso le componenti di spostamento sono adunque funzioni lineari di λ.

Se quindi si vuol soddisfare al problema con una serie ordinata secondo le potenze ascendenti di λ, come appunto fa in generale il sig. Korn [1], si può già prevedere, come aveva notato il compianto prof. Cesàro [2], che la serie si ridurrà ad un numero finito di termini e si ha così un altro metodo, rapido ed elegante, per la risoluzione del problema di Boussinesq-Cerruti. Non è, credo, superfluo notare che lo stesso metodo può essere applicato anche alla sfera. Pongasi infatti

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots$$

e analogamente per v e w, e dove u_0, v_0, w_0 sono armoniche e in superficie assumono i valori assegnati $u(s), \ldots$; le $u_1, \ldots u_2, \ldots$ nulle al contorno, soddisfano alle equazioni

$$\Delta_2 u_1 + 2\frac{\partial \theta_0}{\partial x} = 0 \quad , \quad \Delta_2 u_2 - \Delta_2 u_1 + 2\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0 , \ldots ;$$

$\theta_0, \theta_1, \ldots$ sono le dilatazioni cubiche corrispondenti agli spostamenti $u_0, \ldots$; $u_1, \ldots$; ecc. La u_0 è subito data da una formula ben nota; si deduce poi che [3]

$$\theta_0 = -\frac{1}{4\pi a}\int \mathrm{H}s \, d\sigma = \Phi .$$

La funzione Φ è armonica e quindi la u_1 è biarmonica e si annulla al contorno. Porremo dunque

$$u_1 = (\varrho^2 - a^2)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \ldots ; \; \theta_1 = 2\varrho \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho},$$

e si troverà

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\frac{1}{2}\varrho^{-\frac{3}{2}}\int_0^\varrho \varrho^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \Phi}{\partial x} d\varrho$$

$$\Delta_2 u_2 = 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} .$$

(1) Comptes rendus, t. 142, février 1906, pp. 334-336; Sitzungsb. d. math.-phys. Klasse der K. B. Akad. d. Wiss. zu München. B. XXXVI, pp. 37-80.

(2) Rend. R. Acc. di Scien. fisiche e matem. di Napoli, luglio 1906. Nel caso che sul piano limite siano date le forze, il Cesàro sviluppa invece secondo le potenze di $\frac{3\lambda - 1}{2\lambda} = 1 - \frac{1}{k}$, ottenendo uno sviluppo limitato ai primi due termini. Lo stesso metodo conduce ancora alla risoluzione dei così detti casi *misti* o *alterni*.

(3) Per i calcoli e le notazioni mi riferisco alla mia: *Teoria mat. d. equil. d. corpi elastici*, Milano, 1904, pp. 282-287.

E qui si procederà allo stesso modo, ponendo

$$u_2 = (\varrho^2 - a^2) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \ldots$$

con

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1}{2} \varrho^{-\frac{3}{2}} \int_0^\varrho \varrho^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} d\varrho = -\frac{1}{4} \varrho^{-\frac{3}{2}} \int_0^\varrho \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^\varrho \varrho^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} d\varrho;$$

e così di seguito.

Ora con successive integrazioni per parte si riconosce che

$$\lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \cdots$$

equivale a:

$$\varrho^{\frac{\lambda-3}{2}} \int_0^\varrho \varrho^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \varrho^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} d\varrho,$$

e quindi si riottengono le formule del prof. Almansi.

Deduciamo ancora alcuni dei risultati dei sigg. Cosserat (¹).

Sia λ_1 un polo di ordine m delle soluzioni φ, ψ, χ del sistema (3) e si ponga:

$$\varphi = \frac{u_1}{(\lambda - \lambda_1)^m} + \cdots, \quad \psi = \frac{v_1}{(\lambda - \lambda_1)^m} + \cdots, \quad \chi = \frac{w_1}{(\lambda - \lambda_1)^m} + \cdots$$

Sostituendo in (3), moltiplicando per $(\lambda - \lambda_1)^m$ e poscia facendo $\lambda = \lambda_1$ si trova

$$0 = u_1(s) + \frac{1}{2\pi} \int u_1(\sigma) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{\lambda_1}{2\pi} \int r \cos(rn) \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} u_1(\sigma) + \cdots \right) d\sigma, \text{ ecc.};$$

sicchè u_1, v_1, w_1 è una soluzione delle equazioni di equilibrio per $\lambda = \lambda_1$, diversa da zero e che si annulla al contorno; cioè una soluzione *fondamentale* o *eccezionale*.

Due di queste soluzioni soddisfano ad una relazione di ortogonalità. Infatti se k_1 e k_2 sono i valori di k corrispondenti a λ_1 e λ_2, dalle (1) deduciamo subito:

$$\int (u_2 \Delta_2 u_1 + \cdots) d\tau = k_1 \int \theta_1 \theta_2 d\tau$$

$$\int (u_1 \Delta_2 u_2 + \cdots) d\tau = k_2 \int \theta_1 \theta_2 d\tau.$$

(¹) *Sur la solution des équations de l'élasticité, dans le cas où les valeurs des inconnues à la frontière sont données* [Comptes rendus, t. 133, juillet 1901, pp. 145-147].

I primi due integrali, pel 2° lemma di Green, sono eguali; quindi per $k_1 \neq k_2$ risulta

$$\int \theta_1 \theta_2 \, d\tau = 0 .$$

Da questa relazione, al modo solito, si deduce che *i poli sono reali*.

È poi chiaro che tali poli debbono cadere tra -1 e $-\infty$. Del resto si può osservare che

$$\int (u_1 \Delta_2 u_1 + \cdots) \, d\tau = k_1 \int \theta_1^2 \, d\tau = - \int [(\mathrm{grad}\, u_1)^2 + \cdots] \, d\tau ;$$

dunque k_1 è negativo.

Poscia, osservando che

$$\int \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} \, d\tau = \int \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} \, d\tau , \text{ ecc.}$$

si deduce pure

$$\int [(\mathrm{grad}\, u_1)^2 + \cdots] \, d\tau = \int \theta_1^2 \, d\tau + 4 \int \mathrm{rot}^2 \, s_1 \, d\sigma ,$$

indicando con s_1 lo spostamento (di componenti u_1 , v_1 , w_1). Dunque

$$|k_1| > 1 .$$

Com'è noto il fatto che i valori eccezionali sono reali, è comune ad una estesa classe di equazioni integrali. Infatti il sig. Hilbert (¹) ha dimostrato che se la $f(x , y)$ (il Kern dell'equazione integrale) è simmetrica in x ed y, le radici del determinante dell'equazione sono reali. Si può enunciare un teorema alquanto più generale, e relativo anche ai sistemi di equazioni integrali, come pure altri teoremi relativi alla semplicità dei poli, e che permettono di dedurre assai agevolmente moltissimi teoremi del sig. Plemelj (²); ma su questi insisterò in altra occasione.

(¹) *Grundzüge e. allg. Theorie der linearen Integralgleichungen*. Erste Mitt. [Nachrichten d. K. Gesell. d. Wiss. zu Göttingen, 1904, Heft 1, pag. 63].

(²) *Ueb. lineare Randwertaufgaben d. Potentialtheorie* [Monatshefte für Mathem. u. Physik, XV Jahrg.].