ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Sull'equazione della propagazione del calore in un filo.* Nota del prof. GIUSEPPE PICCIATI, presentata dal Corrispondente T. LEVI-CIVITA.

In una Nota [1] dei Comptes Rendus de l'Académie des Sciences il prof. Volterra ha dato un metodo generale per l'integrazione dell'equazione della propagazione del calore, a due variabili, ed ha stabilito una formula che, sotto un'unica espressione, racchiude i diversi tipi di integrali di questa equazione. L'applicazione del metodo del Volterra e l'uso della funzione di Green (così chiamata dal Sommerfeld perchè compie nel problema della propagazione del calore l'ufficio che nella teoria del potenziale compie la funzione di Green) permettono di rappresentare, in forma semplice e compendiosa, l'integrale tenendo conto delle condizioni ai limiti che valgono a caratterizzarlo. In questa breve Nota mi propongo di assegnare, con tale procedimento, l'espressione esplicita dell'integrale in un caso particolare. Si tratta di un risultato sostanzialmente noto, ma non mi pare superfluo presentarne una deduzione semplice, tanto più che delle formule alle quali così si perviene mi varrò prossimamente nello studio di alcuni problemi idrodinamici (moto dei solidi nei liquidi viscosi) che si possono ricondurre alla stessa questione analitica.

Si consideri l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(z, t) \tag{1}$$

della quale si voglia determinare l'integrale soddisfacente alle condizioni

$$(u)_{z=0} = \varphi(t) \quad ; \quad (u)_{z=h} = \psi(t) \quad ; \quad (u)_{t=0} = \chi(z) , \tag{2}$$

essendo h una costante positiva, φ, ψ, χ funzioni arbitrarie [2] degli argomenti indicati.

Chiamiamo per un momentn ζ, τ le variabili (anzichè z e t) da cui dipendono u ed f, e consideriamo un campo σ in cui non cada alcuna singolarità di queste funzioni. Prendiamo (vedi figura) come campo σ il rettangolo delimitato dalle rette $\zeta = 0$, $\zeta = h$, $\tau = 0$, $\tau = t$, essendo t parametro positivo.

[1] *Sur les équations différentielles du type parabolique*, Paris, 5 dec. 1904.

[2] Si intende arbitrarie in senso fisico; in particolare tali da rendere effettivamente eseguibili le operazioni di calcolo indicate nel testo.

Consideriamo, insieme all'equazione

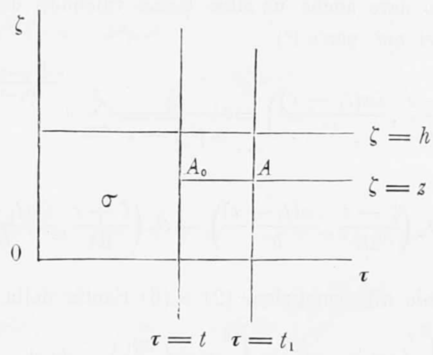
$$(1)' \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + f(\zeta, \tau),$$

una soluzione u_1 dell'altra equazione

$$(3) \qquad -\frac{\partial u_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2},$$

pure senza singolarità nel campo σ che si considera; moltiplicando la (1)′ per u_1 e la (3) per u e sottraendo si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(u u_1) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(u_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right) + u_1 f,$$



quindi anche

$$\int_\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau}(u u_1) - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(u_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)\right] d\sigma = \int_\sigma u_1 f \, d\sigma.$$

Colla formula di Gauss, se s è il contorno del campo σ, otteniamo

$$\int_s \left[u u_1 \, d\zeta + \left(u_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right) d\tau\right] = \int_\sigma u_1 f \, d\sigma,$$

ossia

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\int_0^h (u u_1)_{\tau=t} \, d\zeta + \int_t^0 \left(u_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=h} d\tau + \\ &+ \int_h^0 (u u_1)_{\tau=0} \, d\zeta + \int_0^t \left(u_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} d\tau = \int_\sigma u_1 f \, d\sigma. \end{aligned}$$

Sia ora A un punto di coordinate $\zeta = z$, $\tau = t_1$, ove $0 < z < h$, $t_1 > t$ e si consideri l'integrale u_1 della (3) analogo alla funzione di Green ([1]), cioè

$$u_1 = (t_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{\frac{-(\zeta - z - 2nh)^2}{4(t_1 - \tau)}} - e^{\frac{-(\zeta + z + 2nh)^2}{4(t_1 - \tau)}} \right\}; \tag{5}$$

esso soddisfa alle condizioni seguenti:

1ª per $\lim (t_1 - \tau) = 0$ si annulla salvo che per $\zeta = z$, cioè nel punto A, dove diviene infinito come la soluzione fondamentale

$$(t_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-(\zeta - z)^2}{4(t_1 - \tau)}};$$

2ª soddisfa alle condizioni limiti

$$(u_1)_{\zeta=0} = 0 \quad (u_1)_{\zeta=h} = 0; \tag{6}$$

3ª non ha singolarità nel campo σ.

Ad esso si può dare anche un'altra forma valendosi della funzione ϑ_3 di Jacobi; infatti si può porre ([2])

$$\vartheta_3\left(\frac{\zeta - z}{2h}, \frac{i\pi(t_1 - \tau)}{h^2}\right) = \frac{h}{\pi\sqrt{t_1 - \tau}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(\zeta - z - 2nh)^2}{4(t_1 - \tau)}},$$

quindi risulta

$$u_1 = \frac{\pi}{h} \left\{ \vartheta_3\left(\frac{\zeta - z}{2h}, \frac{i\pi(t_1 - \tau)}{h^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{\zeta + z}{2h}, \frac{i\pi(t_1 - \tau)}{h^2}\right) \right\}. \tag{7}$$

Avendo riguardo alle condizioni (2) e (6) risulta dalla (4)

$$\int_0^h (u u_1)_{\tau=t} \, d\zeta - \int_t^0 \psi(\tau) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=h} d\tau +$$
$$+ \int_h^0 \chi(\zeta)\, (u_1)_{\tau=0} \, d\zeta - \int_0^t \varphi(\tau) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} d\tau = \int_\sigma u_1 f \, d\sigma.$$

Spostiamo ora il punto A sulla retta $\zeta = z$, avvicinandolo indefinitamente al punto A_0 di coordinate z, t: avremo dalla formula precedente che

$$\lim_{t_1 = t} \int_0^h (u u_1)_{\tau=t} \, d\zeta = \int_0^t \varphi(\tau) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\substack{\zeta=0 \\ t_1=t}} d\tau -$$
$$- \int_0^t \psi(\tau) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\substack{\zeta=h \\ t_1=t}} d\tau + \int_0^h \chi(\zeta)\, (u_1)_{\substack{\tau=0 \\ t_1=t}} \, d\zeta + \int_\sigma (u_1)_{t_1=t} f \, d\sigma.$$

([1]) Vedi Sommerfeld, Math. Ann. 45, 1894, *Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung*.

([2]) Vedi Poincaré, *Théorie de la propagation de la chaleur*, pag. 93.

Ma per le proprietà della funzione u_1 è

$$\lim_{t_1=t} \int_0^h (u\, u_1)_{\tau=t}\, d\zeta = 2\sqrt{\pi}\, u(z\,,t)\,,$$

quindi otteniamo

$$(8)\qquad \begin{aligned} 2\sqrt{\pi}\, u(z\,,t) = & \int_0^t \varphi(\tau) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\substack{\zeta=0\\ t_1=t}} d\tau \,- \\ & - \int_0^t \psi(\tau) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\substack{\zeta=h\\ t_1=t}} d\tau + \int_0^h \chi(\zeta)\,(u_1)_{\substack{\tau=0\\ t_1=t}}\, d\zeta + \int_\sigma (u_1)_{t_1=t}\, f\, d\sigma \end{aligned}$$

avendo u_1 l'espessione (5) o (7): questa $u(z\,,t)$ è l'integrale della (1) soddisfacente alle condizioni (2).

Nel caso in cui sia h infinito, e le condizioni ai limiti siano

$$(2)'\qquad (u)_{z=0} = 0\quad,\quad (u)_{z=\infty} = 0\quad,\quad (u)_{t=0} = \chi(z)\,,$$

la u_1 assume la forma semplice

$$(5)'\qquad u_1 = (t_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{\frac{-(\zeta-z)^2}{4(t_1-\tau)}} - e^{\frac{-(\zeta+z)^2}{4(t_1-\tau)}} \right\},$$

e la (8) dà

$$(8)'\qquad \begin{aligned} 2\sqrt{\pi}\, u(z\,,t) = & \int_0^t \varphi(\tau)\, e^{\frac{-z^2}{4(t-\tau)}} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} z\, d\tau \,+ \\ & + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty \chi(\zeta) \left[e^{\frac{-(\zeta-z)^2}{4t}} - e^{\frac{-(\zeta+z)^2}{4t}} \right] d\zeta + \int_\sigma \left[e^{\frac{-(\zeta-z)^2}{4(t-\tau)}} - e^{\frac{-(\zeta+z)^2}{4(t-\tau)}} \right] \frac{f}{\sqrt{t-\tau}}\, d\sigma\,. \end{aligned}$$

Mostrerò in una prossima Nota come queste formole trovano utile applicazione nella teoria dei fluidi viscosi.

Fisica — *Sulla durata dell'emissione catodica nei tubi a vuoto.* Nota del dott. Pietro Doglio, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.