ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Meccanica. — *Un teorema sulle deformazioni elastiche dei solidi isotropi.* Nota di E. ALMANSI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Per le funzioni armoniche sussiste il teorema:

Se φ è una funzione armonica e regolare nello spazio S *limitato dalla superficie σ, e se nei punti di una regione σ_0 di σ la funzione φ e la sua derivata rispetto alla normale interna sono nulle, la funzione φ è nulla in tutto lo spazio* S.

Di questo teorema, una dimostrazione, basata su considerazioni non del tutto rigorose, è date dal Kirchhoff (Mechanik, pp. 187-88). Un'altra dimostrazione è la seguente.

Consideriamo, oltre ad S, lo spazio S′ compreso fra σ_0 ed una superficie σ' situata fuori di S.

Detta n la normale interna nei punti di σ, ed r la distanza da un punto P_1 di S o di S′ ad un altro punto qualunque P, prendiamo ad esaminare la funzione ψ definita nel punto P_1 della formula:

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma .$$

Essa è armonica e regolare in S e in S′, ed è continua, con tutte le sue derivate, anche sulla superficie σ_0, ove $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Ma nello spazio S la ψ non è altro che la φ; e nello spazio S′ la ψ è nulla, giacchè la funzione armonica $\frac{1}{r}$, quando il polo P_1 si trova fuori di S, è regolare in S, e perciò l'integrale esteso a σ, che figura nella formula precedente, è allora uguale a zero.

Per una nota proprietà delle funzioni armoniche, la ψ annullandosi in S′ dovrà pure annullarsi in S. Dunque la φ è nulla in tutto lo spazio S, c. v. d.

2. Sulle deformazioni dei solidi elastici isotropi possiamo dimostrare un teorema analogo.

Un corpo elastico isotropo, non soggetto a forze di massa, occupi lo spazio S *limitato dalla superficie σ. In tutti i punti di una regione σ_0 di σ siano nulli gli spostamenti e le tensioni esterne. Dico che la deformazione è nulla in tutto il solido.*

Consideriamo ancora, fuori di S, lo spazio S′ compreso fra σ_0 e σ', e diciamo r la distanza da un punto P_1 di S o di S′ ad un altro punto qualunque $P(x, y, z)$.

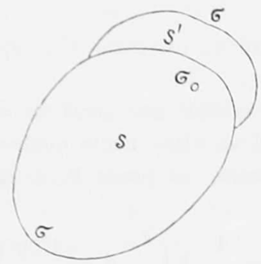
Denotiamo poi con u, v, w le componenti di spostamento dei punti di S, con L, M, N le componenti della tensione esterna che agisce sugli elementi di σ. Infine poniamo

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \quad , \quad v' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \quad , \quad w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} ;$$

e sieno L', M', N' le quantità analoghe ad L, M, N, ma formate cogli spostamenti u', v', w'.

Esaminiamo la funzione ψ definita nel punto P_1 della formula

$$\psi = \int_\sigma (Lu' + Mv' + Nw')\, d\sigma - \int_\sigma (L'u + M'v + N'w)\, d\sigma .$$



Questa funzione è armonica e regolare in S ed in S', e sulla super. σ_0 (ove $u = v = w = L = M = N = 0$) è continua con tutte le sue derivate. Nello spazio S' essa si annulla, ciò che si vede immediatamente applicando il teorema del Betti alle due deformazioni (u, v, w) ed (u', v', w'), delle quali anche la seconda, quando il polo P_1 si trova nello spazio S', è regolare.

Dunque la ψ dovrà annullarsi anche nello spazio S. E perciò nello spazio S sarà pure nulla la dilatazione θ, che in virtù di una nota formula è la stessa ψ a meno di un fattore costante.

Dalle equazioni dell'elasticità

$$A \Delta^2 u + (A + B) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 , \text{ ecc.,}$$

deduciamo che in tutto lo spazio occupato dal solido le componenti di spostamento u, v, w devono essere funzioni armoniche.

Ora nei punti di σ_0 le tre funzioni u, v, w, per ipotesi, si annullano. E si annullano pure le loro derivate rispetto alla normale interna. Infatti, poniamo per un momento l'origine delle coordinate in un punto P_0 di σ_0, e prendiamo come asse delle z la normale interna (noi supponiamo che la superficie σ_0 ammetta in ogni suo punto un piano tangente determinato).

Nel punto P_0 le componenti della tensione esterna L, M, N sono date dalle formule:

$$L = -A\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad M = -A\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad N = -\left(2A\frac{\partial w}{\partial z} + B\theta\right).$$

Ma in tutti i punti di σ_0 si ha $L = M = N = 0$, e inoltre, come nell'intero spazio S, $\theta = 0$. Nel punto P_0 sarà anche $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$, poichè la w è nulla su tutta la superficie σ_0, e in P_0 il piano xy è tangente a σ_0. In questo punto sarà per conseguenza $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, ovvero, n denotando la normale interna, $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$. Tali formule saranno d'altronde verificate comunque si orientino gli assi coordinati, e in qualunque punto P_0 di σ_0.

Le tre funzioni u, v, w, regolari ed armoniche nello spazio S, annullandosi nei punti di σ_0 insieme alle loro derivate normali, dovranno esser nulle in tutto lo spazio S. E il teorema è così dimostrato.

3. Da questo teorema segue immediatamente che due deformazioni a cui corrispondano, sopra una regione qualunque di σ, valori uguali degli spostamenti u, v, w e delle tensioni esterne L, M, N, sono uguali in tutto il solido.

Ciò mostra che nemmeno in una regione piccolissima σ_0 di σ noi possiamo assegnare ad arbitrio i valori degli spostamenti e delle tensioni. Sia infatti σ_0' una parte di σ_0. Una deformazione a cui, nei punti di σ_0', corrispondono per u, v, w, L, M, N i valori assegnati, se esiste è unica, come risulta dall'osservazione precedente. Saranno perciò determinati i valori delle stesse quantità anche nell'altra parte di σ_0: e questi valori, in generale, non coincideranno con quelli assegnati.

Se il solido è soggetto a forze di massa, non esiste in generale nessuna deformazione in cui gli spostamenti e le tensioni esterne assumano, sopra una regione σ_0 di σ, valori assegnati, diversi da zero o nulli.

Fisica. — *Ulteriori ricerche sulla resistenza elettrica specifica di alcuni metalli puri a temperature molto alte e molto basse.* Nota del dott. GUIDO NICCOLAI, presentata dal Corrispondente ANGELO BATTELLI.

Fisica terrestre. — *La teoria elastica dell'isostasi terrestre.* Nota di LUIGI DE MARCHI, presentata dal Corrispondente T. LEVI CIVITA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.