ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Fisica terrestre. — *La teoria elastica dell'isostasi terrestre.* Nota di Luigi De Marchi, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

Nella mia recente Memoria sulla teoria elastica delle deformazioni tectoniche [1] ho dimostrato incidentalmente che, nel caso speciale della deformazione di un suolo elastico sotto l'azione di forze normali alla superficie, e distribuite lungo una o due striscie rettilinee e parallele, le deformazioni superficiali sono parzialmente compensate, nei rapporti della gravità esterna, dalle condensazioni o dilatazioni che si verificano negli strati sottostanti. Indicando con M la massa positiva o negativa di un rilievo o di una cavità superficiale, la variazione di massa prodotta rispettivamente dalla dilatazione sotto il primo e dalla condensazione sotto il secondo è

$$\mp \frac{2B}{A} M$$

dove A e B sono le costanti d'isotropia, esprimenti l'elasticità di volume e l'elasticità di forma, o rigidità, del materiale. Nell'ipotesi $A = 4B$, che equivale a supporre che il coefficiente di Poisson sia $\mu = \frac{1}{3}$, il compenso tra le masse profonde e le superficiali è solo della metà. Nel caso che la cavità sia piena d'acqua, la massa di questa completerebbe nell'ipotesi data quasi completamente il compenso, che rimarrebbe però incompleto per i rilievi superficiali.

Mi propongo qui di dimostrare che il teorema è generale, che si verifica cioè qualunque sia la distribuzione delle forze, e quindi delle irregolarità superficiali, purchè le forze stesse siano normali e soddisfacciano alla condizione d'equilibrio $\int N ds = 0$ essendo N la forza in un punto qualsiasi, ed essendo l'integrale esteso a tutta la superficie del suolo piano.

[1] Questi *Rendiconti* 17 marzo 1907. In quella Memoria i valori delle componenti u, w dello spostamento elastico sono da intendersi moltiplicati per 2ε, larghezza delle striscie sollecitate. Le conclusioni debbono quindi applicarsi alla distribuzione continua di forze su una zona estesa costituita da un numero infinito di striscie parallele di larghezza 2ε, distribuzione che risponde al problema geologico studiato nella Memoria seguente (ibid. 7 aprile), allora lo spostamento totale è la somma di un numero infinito di questi spostamenti infinitesimi, e si potrà ottenere per integrazione.

Ponendo col Cesàro [1]

$$N = \int \mathrm{N} \log(z + r)\, ds$$

$$\psi = \frac{\partial N}{\partial z} = \int \frac{\mathrm{N} ds}{r} \tag{1}$$

dove l'asse delle z è disposto secondo una normale al piano del suolo, nell'interno della massa, ed r è la distanza di un punto qualunque di questa da un punto qualunque della superficie, la dilatazione e la componente verticale dello spostamento elastico sono [2]

$$\Theta = \frac{1}{2\pi(\mathrm{A} - \mathrm{B})} \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{2}$$

$$w = \frac{\mathrm{A}}{4\pi \mathrm{B}(\mathrm{A} - \mathrm{B})} \psi - \frac{z}{4\pi \mathrm{B}} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{3}$$

Poniamo che la forza N sia il peso di una massa materiale che viene a depositarsi, se N è positiva, o che è levata, se N è negativa, dalla superficie, per unità d'area. Tale rappresentazione corrisponde al caso reale che le deformazioni superficiali siano dovute a trasporto di materiale detritico da regioni soggette a degradazione a regioni alluvionate, ed è evidente che in questo caso è soddisfatta la $\int \mathrm{N} ds = 0$.

La ψ allora si può considerare come un potenziale di strato, rispondente a una distribuzione di masse positive e negative su un piano, e sarà sulla superficie

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_0 = -2\pi \mathrm{N}$$

e quindi

$$\Theta_0 = -\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} - \mathrm{B}}$$

In superficie vi ha dunque compressione dove N è positiva, cioè dove vi è accumulazione, dilatazione dove N è negativa, cioè dove vi è degradazione; la linea, o le linee, che divide le regioni alluvionate dalle regioni degradate è anche una linea di dilatazione nulla.

[1] Cesàro E., *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, Torino, Bocca, 1894, pp. 123, 125.

[2] Ibid., pag. 125.

Per ogni piano parallelo alla superficie è, estendendo l'integrazione a tutto il piano,

$$\int \Theta ds = 0$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial z}\int \psi ds = 0 .$$

Infatti pel teorema di Green è

$$\int \Delta_2 \psi dS = -\int_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} ds + \int_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} ds$$

essendo il primo integrale esteso a tutto lo spazio compreso fra il piano dato e la superficie, il secondo a tutto il piano superficiale e il terzo al piano dato. Ora $\Delta_2 \psi = 0$ nello spazio, e $\int_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} ds = -2\pi \int_0 N ds = 0$.

Quindi

$$\frac{\partial}{\partial z}\int \psi \, ds = 0 .$$

L'integrale $\int \psi \, ds$ è quindi costante rispetto a z, e poichè all'infinito ψ è nulla, è per ogni piano

$$\int \psi \, ds = 0 .$$

Ciò vuol dire che, su ogni piano, ψ assume valori positivi e negativi e che esistono quindi una o più linee $\psi = 0$ che dividono le regioni del piano dove ψ è positiva dalle regioni dov'è negativa.

In particolare sul piano superficiale le linee $\psi = 0$ coincidono, per la (3), colle linee $w = 0$ che dividono le regioni dove vi è sprofondamento ($w > 0$) dalle regioni dove vi è sollevamento ($w < 0$). Per la continuità del potenziale ψ, le linee $\psi = 0$ di piani successivi costituiranno una o più superficie $\psi = 0$, che intersecheranno in generale obliquamente la superficie, nelle curve $w = 0$; solo quando la curva $w = 0$ coincida colla $N = 0$ la superficie $\psi = 0$ interseca normalmente il piano superficiale. Poichè Θ diminuisce rapidamente col crescere di z e si annulla all'infinito, la superficie o le superficie $\psi = 0$ a grande profondità sono superficie cilindriche verticali. Abbiamo così tutta la massa divisa in tante regioni estendentisi all'infinito, ciascuna delle quali abbraccia in superficie un'intera area sprofondata o un'intera area sovrelevata; nelle regioni sottoposte alle aree sprofondate la ψ è positiva, nelle altre è negativa.

Ciò premesso, il teorema del compenso parziale risulta evidente. Dalla (2) si ha infatti

$$\int \Theta dS = \frac{1}{2\pi(A-B)} \int \frac{\partial \psi}{\partial z}\, dS = -\frac{1}{2\pi(A-B)} \int \psi \cos(nz)\, d\sigma$$

dove il primo integrale si intenda esteso a una regione qualsiasi S dello spazio e l'ultimo alla superficie della regione stessa, essendo (nz) l'angolo che la normale interna alla superficie forma coll'asse delle z. Se in particolare estendiamo le integrazioni a una delle regioni limitate dal piano superficiale e da una superficie $\psi = 0$ si ha

$$\int \Theta dS = -\frac{1}{2\pi(A-B)} \int_{\sigma_0} \psi_0\, d\sigma_0$$

dove il secondo integrale è esteso alla regione di piano superficiale limitata dalla curva $w = 0$. Infatti per questa porzione della σ totale è $\cos(nz) = 1$, per la rimanente è $\psi = 0$.

Ma dalla (3), ove si ponga $z = 0$, si ha

$$\psi_0 = \frac{4\pi B(A-B)}{A} w.$$

Quindi

$$\int \Theta dS = -\frac{2B}{A} \int_{\sigma_0} w\, d\sigma_0$$

la quale ci dice che la condensazione o la dilatazione totale, che si verifica in tutta la regione sotterranea sottostante a un'area sprofondata o ad un'area elevata, è eguale alla frazione $\frac{2B}{A}$ del volume della cavità o del rilievo superficiale.

Ricordando che

$$A = \frac{(1-\mu)E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \qquad B = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

dove E è il modulo di Young e μ il coefficiente di Poisson, si ha che per $\mu = \frac{1}{3}$ è $A = 4B$, $\frac{2B}{A} = \frac{1}{2}$. In questo caso cioè la condensazione o la dilatazione sotterranea compensano per la metà il difetto o l'eccesso apparente di massa rispondenti alle cavità o ai rilievi superficiali.

Notiamo che il valore $\mu = \frac{1}{3}$ è alquanto superiore al valore che si deduce pel coefficiente di Poisson dalle velocità dei tremiti preliminari delle onde sismiche, considerate come onde longitudinali ed onde trasversali propagantisi nella massa della Terra, che si suppone isotropa. Questo valore è infatti (¹)

$$\mu = 0{,}298$$

al quale corrisponde il valore

$$\frac{2B}{A} = \frac{4}{7}.$$

Effettivamente i valori di B ed A variano notevolmente da roccia a roccia e anche in una stessa roccia secondo la struttura, la temperatura, la pressione cui è soggetta, e la sua storia anteriore, cioè la serie delle deformazioni cui fu assoggettata in passato (²). Nagaoka e Kusakabe hanno determinato per un gran numero di rocce, principalmente vulcaniche, di varie epoche geologiche i valori di E e di B, e dai loro dati si può dedurre il valore di

$$\frac{2B}{A} = \frac{6B - 2E}{4B - E}.$$

Dai dati di Nagaoka si ricavano per quattro campioni di serpentino arcaico i valori approssimati (³)

$$\frac{1}{15} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{2}{5} \quad 1.$$

Per cinque graniti paleozoici

$$\frac{5}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{2}{3}.$$

Per quattro marmi paleozoici

$$\frac{4}{5} \quad 1 \quad \frac{5}{7} \quad \frac{4}{3}.$$

Da questi esempi appare quanta irregolarità può verificarsi nel compenso fra la deformazione superficiale e la variazione di densità profonda. Bisogna notare però che esperienze condotte su piccoli campioni soggetti a forze di torsione e di flessione in aria libera, dove apparivano molto fragili, possono aver dato risultati assai diversi da quelli che darebbe la roccia in posto, potendosi presumere che in una grande massa gli effetti della fra-

(¹) Nagaoka, *Rocks and Velocity of Seismic Waves*, Philos. Magaz., vol. 4, 5 Series, 1900, pag. 67.
(²) Publications of the Eartkquake Investigation Committee, nn. 14, 19 (Kusakabe).
(³) Mem. cit. pp. 60-61.

gilità e di ogni altra perturbazione locale e molecolare si compensino. È opportuno poi notare che a grande profondità, col crescere della temperatura, variano anche le costanti elastiche.

Come regola generale risulta però che il compenso non è completo, che cioè, se non entrano in giuoco altre cause compensatrici, le cavità superficiali debbono rivelarsi negli effetti della gravità con un'anomalia negativa, i rilievi con un'anomalia positiva. E questo tanto più, quando si consideri che la variazione di densità, pur diminuendo rapidamente colla profondità, è sensibile per uno spessore abbastanza rilevante, che possiamo ritenere di parecchie centinaia di chilometri, mentre negli effetti della gravità non agiranno che gli strati più superficiali.

Nel caso delle cavità, se queste si riempiono di acqua o di sedimenti, il compenso potrà essere, come dissi, completato dalla massa di questo riempimento, e di regola si avrà anzi un'anomalia positiva di gravità.

Nel caso dei rilievi invece il compenso non sarà in generale completo, cioè il difetto profondo di massa rispondente alla dilatazione sarà minore della massa apparente dei rilievi stessi. Immaginando che il rilievo sia condensato in uno strato al livello del mare, e analogamente la dilatazione totale profonda condensata in uno strato di densità negativa pure al livello del mare, i due strati non sono in generale equivalenti, ma il secondo è minore del primo.

Ambedue questi fatti, cioè un eccesso di compenso nelle fosse riempite e un difetto nei rilievi montuosi sarebbero accertati dalle misure di gravità in stazioni costiere e in alta montagna. Helmert avrebbe dedotto [1] dalle misure di gravità sulle Alpi Tirolesi, la cui altezza media e di 2036 m., che sotto di esse vi è un difetto relativo di massa che equivale a uno strato dello spessore di 1000-1200 m., per densità comprese fra 2,8 e 2,4; il compenso ivi sarebbe quindi solo del 50 %. Lo stesso risultato dedurrebbe, con qualche riserva, dalle misure di gravità dell' India; nel Caucaso il compenso sarebbe quasi perfetto per le stazioni comprese fra 427 e 715 m. mentre per le stazioni più alte sarebbe incompleto, ma sempre maggiore di $1/2$. Secondo i calcoli di Pizzetti [2] nel Monte Bianco *l'attrazione apparente della massa montuosa è solo in parte (per meno di $1/3$) compensata da probabili deficienze interiori di massa.*

Queste diversità che si riscontrano nei diversi rilievi corrispondono assai probabilmente alla diversa elasticità media delle rocce negli strati superiori fino alla profondità di parecchie decine o centinaia di chilometri, e le mi-

(1) Helmert, *Die Schwerkraft in Hochgebirge* (Veröffentl. d. K. preuss. geodät. Institutes und Centralbureau d. internat. Erdmessung), Berlin 1890.

(2) Pizzetti, *La gravità sul Monte Bianco* (Rend. Accad. Lincei, vol. VIII, ser. 5ª, pp. 34 e seg.).

sure di gravità, quando si potesse rigorosamente sceverare in esse la parte dovuta alle attrazioni locali da quella dovuta alla divergenza del geoide dall'ellissoide di riferimento, potrebbero, in quanto determinerebbero il valore di $\frac{2B}{A}$, dare un'indicazione intorno alle proprietà elastiche stesse e quindi forse intorno alla natura e all'età delle rocce sottostanti.

In generale poi si può conchiudere che non è necessario ricorrere all'ipotesi della fluidità interna della Terra, cui molti geodeti tuttora aderiscono, nonostante i forti argomenti contrari dati dall'Astronomia, per spiegare l'*isostasi* della crosta superficiale terrestre, bastando riconoscere in questa e in tutta la massa centrale le comuni proprietà elastiche.

Fisica terrestre. — *Di alcune possibili relazioni tra la sismicità della Svizzera e quella dell'alta Italia.* Nota di V. Monti, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Colla Nota presente io, non senza molta esitazione, intendo accennare ad alcune possibili relazioni fra la sismicità svizzera e quella italiana, che non sono forse del tutto fortuite.

Chiunque abbia considerato, nella recente Memoria di W. H. Hobbs *On some principles of seismic geology* (1), la carta sismotectonica che l'A. abbozza per la Svizzera, è certamente rimasto colpito dall'andamento delle linee sismotectoniche che valicano colossi montagnosi imponenti, come quelli dell'Oberland bernese, cosicchè ci si può domandare se non si possano per avventura prolungare anche al di quà delle Alpi Pennine e Leponzie fino alla pianura Padana.

Per cercare se le condizioni sismiche dell'alta Italia giustificassero in qualche modo un tal prolungamento, mi servii del ricchissimo materiale raccolto da Baratta (2) e mi lasciai guidare dai caratteri seguenti che, tra gli altri, competono alle linee sismotectoniche di Hobbs.

Sono esse, per quanto ciò si può conciliare coi metodi di proiezione usati nelle carte su cui si tracciano, delle rette divise in gruppi; in ciascuno questi corrono presso a poco parallele fra loro; collegano i punti che sogliono di preferenza funzionare da epicentri sismici; il loro andamento è in relazione coi limiti delle formazioni geologiche, con quelli delle masse montagnose; le linee d'un gruppo intersecano quelle d'un altro in punti che sono centri sismici (3).

(1) Beitr. z. Geophys. VIII, 1907.

(2) *I terremoti d'Italia*, 1901.

(3) I concetti che han guidato Hobbs nello stabilire e tracciare le sue linee sismo-