ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

simo Club, o alla Facoltà medica nell' Università di Torino che ne posseggono uno ciascuno. Le informazioni che occorrono, le dà il Socio Angelo Mosso, Presidente della Commissione in Torino, al quale bisogna indicare le ricerche che si vogliono fare e il tempo che credesi necessario per esse. I posti vengono solo concessi a coloro che abbiano già fatto un tirocinio sperimentale in altri laboratorî e sappiano svolgere un tema scientifico.

Matematica. — *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali totalmente ellittiche.* Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Sia

$$F(z) \equiv \mathcal{A}(z) + \Sigma\, \mathrm{B}_{ik}(xy) \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k} = \mathrm{F}(xy)\,, \tag{1}$$

$$\left[\mathcal{A}(z) \equiv \sum_{l+m=2n} a_{lm}(xy) \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^l \, \partial y^m}\,,\; i+k \leq 2n-1\right]$$

una equazione lineare di ordine $2n$, i cui coefficienti in un campo C del piano xy siano funzioni finite e continue insieme colle loro derivate fino ad un ordine sufficientemente elevato che qui non precisiamo. Sia

$$G(u) \equiv \mathcal{A}(u) + \sum_{i,k} b_{ik} \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \, \partial y^k} = 0 \qquad (i+k \leq 2n-1) \tag{2}$$

l'equazione aggiunta di (1). Si sa allora che, detto Γ un campo interno a C in cui esistano e siano finite e continue z, u e le loro derivate di ordine $\leq 2n$ e detto γ il suo contorno, si ha:

$$\iint_{\Gamma} \left[u\, F(z) - z\, G(u) \right] dx\, dy = \int_{\gamma} \left[\mathrm{M}\, dy - \mathrm{N}\, dx \right] \tag{3}$$

M ed N essendo espressioni bilineari in u e nelle sue derivate di ordine $\leq 2n-1$, in z e nelle sue derivate di ordine $\leq 2n-1$. Se la z è soluzione di (1) e la u è soluzione di (2), la (3) diviene

$$\iint_{\Gamma} u\mathrm{F}(xy)\, dx\, dy = \int_{\gamma} \left[\mathrm{M}\, dy - \mathrm{N}\, dx \right]. \tag{4}$$

Si supponga di conoscere una *soluzione fondamentale* della (2): e cioè una funzione $u(xy\,;x_1 y_1)$ dipendente da un punto parametro $(x_1 y_1)$ che per $(x\,,y) \not\equiv (x_1 y_1)$ abbia derivate di ordine $\leq 2n$ finite e continue e soddisfaccia (2), mentre per $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ abbia le derivate di ordine $2n-1$ infinite di 1° ordine — infinito principale essendo la inversa della distanza dei due punti (xy) ed $(x_1 y_1)$ — ed applichiamo la (4) prendendo come campo Γ il campo $C - \tau$ che si ottiene da C escludendo con un piccolo cerchio τ il punto $(x_1\, y_1)$. Si ottiene facilmente allora, facendo tendere a zero il campo τ, una formula analoga alla ben nota formula della teoria delle funzioni armoniche, esprimente la z soluzione di (1) per mezzo di un integrale di area esteso a C, e di integrali curvilinei estesi al contorno c di C:

$$(5) \qquad z(x_1\, y_1) = A(x_1\, y_1) \left\{ \int\!\!\int_C u\, F(xy)\, dx\, dy + \int_c \left[M\, dy - N\, dx \right] \right\}$$

$A(x_1\, y_1)$ essendo una funzione dipendente dalla $u(xy\, ;\, x_1\, y_1)$ soltanto e non più dalla $z(xy)$.

Io mi sono proposto di mostrare l'esistenza delle soluzioni fondamentali e di trarre dalla formula (5) che così si deduce, alcune conseguenze circa le proprietà delle funzioni $z(xy)$ soluzioni di (1). Esporrò qui brevemente il metodo da me seguito ed i risultati ottenuti rimandando ad una più estesa Memoria di prossima pubblicazione per il minuto sviluppo di queste considerazioni.

2. Una soluzione fondamentale di (2) ha un punto singolare isolato: un noto teorema del Delassus ci fa allora presumere che non si avranno soluzioni fondamentali altro che quando la equazione (2) sia *totalmente ellittica*: abbia cioè tutte le caratteristiche immaginarie in C. Noi supporremo quindi senz'altro che le radici dell'equazione delle caratteristiche

$$(6) \qquad \sum_{l+m=2n} a_{lm}(xy)\, \alpha^l = 0$$

siano tutte complesse in C, e siano ivi funzioni finite e continue insieme colle loro derivate di ordine $\leq 2n + 1$, ed abbiano sempre multiplicità costante. Indicheremo con $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n}$ le radici di (6).

Ciò premesso noi cercheremo di porre la soluzione fondamentale $u(xy\, ;\, x_1\, y_1)$ di (2) sotto la forma

$$(7) \quad u(xy\, ;\, x_1\, y_1) = \psi(xy\, ;\, x_1\, y_1) + \int\!\!\int_C \psi(x\, y\, ;\, \xi\, ,\, \eta)\, f(\xi\eta\, ;\, x_1\, y_1)\, d\xi\, d\eta$$

valendoci delle due funzioni indeterminate f e ψ per modo di raccogliere sopra la $\psi(xy\, ;\, x_1\, y_1)$ tutte le condizioni dipendenti dal comportamento imposto alla $u(xy\, ;\, x_1\, y_1)$ nei punti $(xy) \equiv (x_1\, y_1)$, sulla $f(\xi\eta_1\, ;\, x_1\, y_1)$ la condizione che la u soddisfaccia alla equazione (2). A ciò siamo indotti dalla osservazione che, ove la funzione $f(\xi\eta\, ;\, x_1\, y_1)$ sia finita e continua in tutto C, od anche diventi infinita di ordine ≤ 1, nei punti $(\xi\eta) \equiv (x_1\, y_1)$, la funzione $W(xy\, ;\, x_1\, y_1) = \int\!\!\int_C \psi(xy\, ;\, \xi\eta)\, f(\xi\eta\, ;\, x_1\, y_1)\, d\xi\, d\eta$ e le sue derivate hanno in $(xy) \equiv (x_1\, y_1)$ una singolarità con infinito di ordine minore di quello della $\psi(xy\,;x_1\,y_1)$ e delle derivate corrispondenti, per modo che realmente, ove la $\psi(xy\,;x_1\,y_1)$ abbia il comportamento imposto alla $u(xy\,;x_1\,y_1)$ e la $f(\xi\eta\,;x_1\,y_1)$ siasi potuta determinare in modo che soddisfaccia — quanto al modo di comportarsi in $(\xi\eta)\equiv(x_1\,y_1)$ — alle condizioni ora esposte, anche la (7) ha in $(x_1\,y_1)\equiv(xy)$ il comportamento imposto alla $u(xy\,;x_1\,y_1)$.

Trarremo di qui immediatamente una condizione cui deve soddisfare la ψ. Poichè la u ha derivate di ordine $2n-1$ infinite di ordine 1 nel punto $(xy)\equiv(x_1\,y_1)$, essa, e similmente la ψ, avrà derivate di ordine $2n$ infinite di 2° ordine: ed affinchè la u soddisfaccia all'equazione (2) occorre che la somma dei termini di $G(u)$ che hanno singolarità di 2° ordine in $(xy)\equiv(x_1\,y_1)$ abbia una singolarità di ordine <2. Ora, se la u ha la forma (7), la somma dei termini di massima singolarità in $G(u)$ è proprio $\varDelta(\psi(xy\,;x_1\,y_1))$; quindi la funzione $\psi(xy\,;x_1\,y_1)$ dovrà avere le derivate di ordine $2n$ singolari di 2° ordine in $(xy)\equiv(x_1\,y_1)$, ma tali che l'espressione $\varDelta(\psi(xy\,;x_1\,y_1))$ abbia una singolarità di ordine <2 soltanto. Guidato da questo concetto ho determinato nel modo che ora esporrò brevemente la funzione ψ; la condizione che la $u(xy\,;x_1\,y_1)$ data da (7) soddisfaccia a (2) si traduce allora in una equazione integrale per la $f(\xi\eta\,;x_1\,y_1)$, che pel fatto medesimo che $\varDelta(\psi)$ ha una singolarità di ordine <2 in $(xy)\equiv(x_1\,y_1)$ rientra nel tipo studiato dal Fredholm e dall' Hilbert.

3. Il Somigliana [1], studiando un caso particolare del problema di cui qui trattiamo, era riuscito a determinare le soluzioni fondamentali delle equazioni totalmente ellittiche omogenee nelle derivate di ordine $2n$, ed a coefficienti costanti: in tal caso l'espressione $G(u)$ diviene $G(u)\equiv\varDelta(u)$ ed i coefficienti di $\varDelta(u)$ e quindi anche le radici della equazione delle caratteristiche sono costanti. Supponiamo, per fissare le idee, che queste radici siano tutte semplici: la soluzione del Somigliana ha allora la forma seguente

$$\psi(xy\,;x_1\,y_1)\equiv\sum_1^{2n} d_j\,\sigma_j(xy\,;x_1\,y_1)^{2n-2}\log\sigma_j(xy\,;x_1\,y_1) \tag{8}$$

dove $\sigma_j\equiv(x-x_1)\,\alpha_j+y-y_1$, e dove i coefficienti d_j sono formati anche essi colle radici α_j di (6) e determinati in modo che la funzione (8) risulti monodroma in tutto il piano reale.

Supponiamo ora che le a_{lm} e quindi le α_j non siano costanti e consideriamo ancora la funzione (8) medesima, essa non soddisferà più, come quando la α_j e quindi le d_j erano costanti, all'equazione $\varDelta(\psi)=0$. Ma è facile vedere, scrivendo esplicitamente le derivate successive della funzione (8) che i termini di massima singolarità si ottengono eseguendo la derivazione

[1] Somigliana, *Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali.* Annali di Matematica, tomo XXII, § 2.

come se le α_j e quindi le d_j fossero costanti. Ne segue che la funzione ψ data da (8) ha le singolarità volute in $(xy) \equiv (x_1 y_1)$, ma che formando la $\Delta(\psi)$, questa ultima espressione non avrà che una singolarità di ordine ≤ 1; appunto come si era riconosciuto necessario nel n° precedente. Assumeremo quindi la (8) come funzione $\psi(xy\,;x_1 y_1)$. Analoghe considerazioni valgono quando la radici non sono tutte semplici.

4. Si consideri ora la funzione

$$\text{(9)} \qquad W(xy) = \iint_C \psi(xy\,;\xi\eta)\, f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Si dimostra facilmente:

1°. La funzione $W(xy)$ è una funzione finita e continua in C insieme colle sue derivate dei primi $2n-1$ ordini, in tutti i punti in cui la funzione $f(xy)$ è finita e continua: le derivate si ottengono derivando sotto il segno. Nei punti in cui $f(xy)$ diviene infinita di ordine ≤ 1 le derivate $(2n-1)$ esime di W hanno una singolarità al più logaritmica.

2°. Nei punti dove la funzione $f(xy)$ ha derivate finite, [od anche è tale che i suoi rapporti incrementali rimangono sui raggi per (xy) uniformemente integrabili anche ridotti ai loro valori assoluti] la funzione $W(xy)$ ammette derivate di ordine $2n$. Ed in questi punti si ha

$$\text{(10)} \quad \Delta(W) = 2\pi(2n-2)!\, f(xy)\, a_{2n0}(xy) + \iint_C k(xy\,;\xi\eta)\, f(\xi\eta)\, d\xi\, d\xi$$

$k(xy\,;\xi\eta)$ essendo una funzione che in $(xy) \equiv (\xi\eta)$ non ha che una singolarità al più di 1° ordine.

Applichiamo questi risultati alla funzione (7). Ammettendo per un momento che la funzione $f(\xi\eta\,;x_1 y_1)$ sia tale che all'integrale del secondo membro si possano applicare i teoremi enunciati sopra per la derivazione della funzione $W(xy)$, noi otteniamo che la condizione che la (7) soddisfaccia alla (2) si traduce in una equazione integrale del tipo

$$\text{(11)} \quad f(xy\,;x_1 y_1) + \iint_C \chi_1(xy\,;\xi\eta)\, f(\xi\eta\,;x_1 y_1)\, d\xi\, d\eta + \varrho(xy\,;x_1 y_1) = 0$$

dove la χ_1 è una funzione che nel punto $(xy) \equiv (\xi\eta)$ diviene infinita di ordine ≤ 1, ad essa si può quindi applicare la teoria di Fredholm.

Distinguiamo allora due casi:

1°. La equazione (11) ha il determinante $\neq 0$: essa è quindi risolubile: si verifica a posteriori che la funzione $f(xy\,;x_1 y_1)$ risolvente la (11) soddisfa a quelle proprietà relative al suo comportamento nei punti di C per cui è legittima la deduzione di (11) da (2). Il problema è così totalmente risoluto.

2°. La equazione (11) ha il determinante $=0$. Esisterà allora un numero finito m di funzioni eccezionali φ che risolvono l'equazione omogenea $\varphi(xy)+\int\int_C \chi_1(x_1 y_1 ; xy)\, \varphi(x_1 y_1)\, dx_1\, dy_1 = 0$: siano esse $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_m$. Affinchè la equazione (11) ammetta soluzione è necessario e sufficiente che sia

$$\int\int_C \varphi_i(xy)\, \varrho(xy ; x_1 y_1)\, dx\, dy = 0$$

qualunque siano i ed $(x_1 y_1)$. In questo caso conviene modificare leggermente la forma (7) imposta ad $u(xy ; x_1 y_1)$: cercheremo di porre la funzione nella forma

$$(7')\quad u(xy ; x_1 y_1) = \psi(xy ; x_1 y_1) + \int\int_C \psi(xy ; \xi\eta)\, f(\xi\eta ; x_1 y_1)\, d\xi\, d\eta - \\ - \sum_1^m {}_j\, \lambda_j(x_1 y_1)\, v_j(xy)$$

le $v_j(xy)$ essendo funzioni arbitrarie (¹), e le $\lambda_j(x_1 y_1)$ essendo da determinarsi convenientemente. Applicando a (7') i processi applicati a (7) otteniamo una equazione analoga a (11):

$$(11')\quad f(xy ; x_1 y_1) + \int\int_C \chi_1(xy\, \xi\eta)\, f(\xi\eta ; x_1 y_1) + d\xi\, d\eta + \\ + \left[\varrho(xy ; x_1 y_1) - \sum_1^m {}_j\, \lambda_j(x_1 y_1)\, t_j(xy)\right] = 0$$

dove le $t_j(xy)$ sono funzioni formate colle $v_j(xy)$ e colle loro derivate. Si determinano allora le funzioni $\lambda_j(x_1 y_1)$ in modo che siano soddisfatte le equazioni

$$\sum {}_j\, \lambda_j(x_1 y_1) \int\int_C \varphi_i(xy)\, t_j(xy)\, dx\, dy = \int\int_C \varphi_i(xy)\, \varrho(xy ; x_1 y_1)\, dx\, dy \text{ (²)}.$$

Dopo di che (11') sarà certamente risolubile, e determinerà una funzione f che soddisfa alle solite condizioni sotto le quali sono legittimi i ragionamenti precedenti. Quindi anche in questo caso il problema della ricerca delle soluzioni fondamentali è completamente risoluto.

Si verifica che la funzione così costruita, sia essa data da (7) oppure da (7'), è tale che la funzione $A(x_1 y_1)$ che da essa dipende e compare in (5) esiste ed è regolare in tutto C. Onde si conchiude che la soluzione fonda-

(¹) Sottoposte alla sola condizione di disuguaglianza di cui nella nota che segue.

(²) Queste equazioni sono risolubili appena che le $v_j(xy)$ sono scelte per modo che il determinante i cui elementi sono $\delta_{ij} = \int\int_C \varphi_i(xy)\, t_j(xy)\, dx\, dy$, sia diverso da zero. È questa l'unica condizione cui sono sottoposte le v e cui si è fatto cenno nella nota precedente.

mentale trovata è atta alla deduzione della formula (5) come noi abbiamo rapidamente indicato nel n° 1.

5. Una delle più importanti applicazioni della formula (5) sta nella dimostrazione del carattere analitico delle soluzioni di (1). Sulla formula analoga per le funzioni armoniche e più in generale per le soluzioni delle equazioni di secondo ordine *prive di termine noto*, si fonda l'ordinaria dimostrazione dell'analiticità di queste funzioni; essa è allora immediata conseguenza del carattere analitico della soluzione fondamentale e del fatto che in questo caso manca in (5) l'integrale di area. Quando vi è termine noto si dovette ricorrere fin qui a sviluppi in serie convenienti, perchè il presentarsi dell'integrale di area nella (5) pareva rendesse impossibile una estensione della formula medesima al campo complesso.

Volendo dimostrare il carattere analitico delle soluzioni di (1), noi dovremo studiare il carattere analitico delle soluzioni fondamentali trovate: ma allora la forma stessa (7) o (7') che a queste noi abbiamo assegnato ci porta ad occuparci di un integrale di area affatto simile a quello che compare in (5), onde ci sarà poi affatto indifferente supporre che (1) abbia o no termine noto.

Con ragionamenti su cui qui non possiamo insistere si vede che tutta la questione viene ad aggirarsi sulla natura analitica della $\psi(xy\,;x_1\,y_1)$ e degli integrali del tipo $W(xy) = \int\int_C \psi(xy\,;\,x_1\,y_1)\,f(x_1\,y_1)\,dx_1\,dy_1$, $f(x_1\,y_1)$ indicando una funzione analitica di $x_1\,y_1$. La funzione $\psi(xy\,;x_1\,y_1)$ è una funzione analitica sia di xy, che di $x_1\,y_1$; però nel campo complesso le infinite determinazioni che essa può avere corrispondentemente alle varie determinazioni dei logaritmi che compaiono in (8), non restano più distinte, come invece accadeva nel campo reale. Onde se noi ad (xy) nell'integrale che definisce $W(xy)$ diamo valori complessi esso perde ogni senso. Io dimostro che però in un certo campo complesso contenente il campo C (¹), la funzione $W(xy)$ si può prolungare analiticamente: e precisamente per tali punti essa è data dall'integrale $\int\int_{\Gamma(xy)} \psi(xy\,;x_1\,y_1)\,f(x_1\,y_1)\,dx_1\,dy_1$ esteso al cono $\Gamma(xy)$ che dal punto (xy) proietta i punti del contorno c di C. Fondandomi su questo teorema riesco a dimostrare l'analiticità delle soluzioni di (1).

Noterò che dal teorema medesimo scende in particolare l'estensione al campo complesso della ordinaria formula di Green: per essa il valore in un punto $(x_1\,y_1)$ di una soluzione dell'equazione $\Delta_2 z = f(xy)$ — dove $f(xy)$ è una funzione analitica di x ed y — è rappresentato pei punti $(x_1\,y_1)$ che hanno

(¹) I punti di questo campo complesso soddisfano alla condizione che la loro distanza dal piano reale è minore eguale ad una certa frazione della distanza della proiezione del punto sul piano reale dal contorno c di C.

la proiezione reale nel campo C e che appartengono ad un campo complesso contenente C e convenientemente limitato, dalla formula

$$z(x_1\,y_1)=\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{\Gamma(x_1 y_1)}\log r\,f(xy)\,dx\,dy+\frac{1}{2\pi}\int_c\left[\frac{\partial\log r}{\partial n}z-\frac{\partial z}{\partial n}\log r\right]ds$$

$\Gamma(x_1\,y_1)$ indicando il cono che dal punto $(x_1\,y_1)$ proietta il contorno c di C.

6. Si presenta ora la questione di estendere sia ai sistemi di equazioni che alle equazioni in più variabili i risultati ottenuti sopra. Io ho mostrato come l'estensione sia immediata pei sistemi della forma

$$\begin{array}{l} \varDelta_{11}u_1+\varDelta_{12}u_2+\dots+\varDelta_{1n}u_n+\sum a_{lm}^{(1i)}\dfrac{\partial^{l+m}u_i}{\partial x^l\,\partial y^m}+b_1=0 \\ \varDelta_{21}u_1+\varDelta_{22}u_2+\dots+\varDelta_{2n}u_n+\sum a_{lm}^{(2i)}\dfrac{\partial^{l+m}u_i}{\partial x^l\,\partial y^m}+b_2=0 \qquad \begin{pmatrix}0\leq l+m\leq k-1\\ i=1\,,2\dots n\end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varDelta_{n1}u_1+\varDelta_{n2}u_2+\dots+\varDelta_{nn}u_n+\sum a_{lm}^{(ni)}\dfrac{\partial^{l+m}u_i}{\partial x^l\,\partial y^m}+b_n=0 \end{array}$$

dove

$$\varDelta_{ij}=\lambda_{k0}^{(ij)}\frac{\partial^k}{\partial x^k}+\lambda_{k-1\,1}^{(ij)}\frac{\partial^k}{\partial x^{k-1}\,\partial y}+\dots+\lambda_{0k}^{(ij)}\frac{\partial^k}{\partial y^k};$$

le λ, a, b essendo funzioni finite continue colle loro derivate di ordine sufficientemente elevato nel campo C: tali inoltre che l'equazione di grado k_n ottenuta uguagliando a zero il determinante formato colle espressioni $\sum\lambda_{rs}^{(ij)}\alpha^r$, abbia solo radici complesse, e di multiplicità costante nel campo che si considera, finite e continue colle loro derivate di ordine sufficientemente elevato.

Anche all'equazioni in più variabili si applicano i metodi precedenti. Però in tal caso non è nota una funzione che abbia l'ufficio che nei nostri ragionamenti aveva la funzione del Somigliana. Ho dovuto quindi limitarmi per ora a due casi: l'uno quando l'equazione è in n variabili ma del secondo ordine: l'altro è quello in cui la equazione è di ordine $2m$ ed il gruppo dei termini di ordine massimo è il prodotto simbolico di m espressioni di 2° ordine.