ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

tale caso, l'aria incontrata presentava rispetto a me una velocità relativa, identicamente paragonabile alla velocità dell'aria del ventilatore.

Riserbandomi di studiare in modo più esauriente questi curiosi fenomeni, anche nelle correnti d'acqua (1), credo che non sia male aver accennato a tre elementi di spiegazione, dei quali, in uno studio razionale del fenomeno, nemmeno uno dovrà essere trascurato.

Meccanica. — *Sul moto di una sfera in un liquido viscoso.* Nota del prof. Giuseppe Picciati, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

I primi problemi relativi al moto di corpi solidi in liquidi viscosi sono stati trattati dallo Stokes, il quale nel suo classico lavoro (2), *On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums*, studia il moto oscillatorio lento (3) di un piano, di una sfera e di un cilindro, ed anche il moto traslatorio lento di una sfera, il cui centro si muove in linea retta con velocità uniforme.

Altri casi di moti stazionari e di moti oscillatori lenti sono stati posteriormente studiati; però dei problemi che si riferiscono al moto vario e lento di un solido in un liquido viscoso, quando si considerino, per esempio, il corpo ed il solido soggetti ad una forza esterna costante come la gravità, uno solo, che io sappia, è stato trattato dal Basset (4): quello di una sfera pesante.

La trattazione di questo problema fatta dal Basset è però tutt'altro che semplice, chiara e completa. L'autore suppone dapprima che la sfera si muova con velocità uniforme in linea retta, nel liquido inizialmente in quiete, ed in un modo complicatissimo determina la così detta funzione di corrente di Stokes, da cui dipende il movimento del liquido. Da questo caso passa a quello in cui la sfera si muove con velocità variabile, quindi, determinata la resistenza che la sfera incontra a muoversi nel liquido viscoso, studia il moto della sfera pesante. L'equazione a cui giunge, e che determina la velocità di questo moto, non è però da lui integrata che nell'ipotesi particolare in cui il coefficiente cinematico di viscosità sia una quantità tanto piccola che di esso si possano trascurare la prima o la seconda potenza.

Lo stesso problema si può invece risolvere direttamente, supponendo la velocità della sfera variabile e qualunque le condizioni iniziali del liquido,

(1) Riabouschinsky, loc. cit., pag. 39 e seg.

(2) Math. and. Phys. Papers, t. III, Cambridge, 1901.

(3) Si chiama così il moto quando è tale che si possono trascurare i quadrati ed i prodotti delle componenti della velocità e loro derivate.

(4) *A Treatise on Hydrodynamics*, t. II, pag. 285, Cambridge, 1888.

riconducendo con una semplice osservazione l'equazione da cui dipende la funzione di corrente a quella della propagazione del calore in un filo.

Oggetto della presente Nota è l'esposizione di questo semplice risultato con cui si determina la funzione di corrente, quindi il moto lento provocato dalla sfera nel liquido e la resistenza da essa sopportata. Mi propongo di discutere in seguito i risultati relativi al moto della sfera pesante nel liquido viscoso.

1. Le equazioni generali del moto dei fluidi viscosi incomprimibili, soggetti a forze conservative, sono [1]

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(U - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu \nabla^2_u \,, \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(U - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu \nabla^2_v \,, \\[2ex] \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(U - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu \nabla^2_w \,, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \,,$$

ove

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \,,$$

essendo u, v, w le componenti della velocità del fluido relative agli assi fissi x, y, z; U il potenziale delle forze, p la pressione, ϱ la densità del fluido e ν il coefficiente cinematico di viscosità (quoziente del coefficiente di viscosità od attrito interno k per la densità ϱ del fluido). Gli sforzi specifici dipendono dalle caratteristiche della deformazione secondo le note formule

$$(3)\qquad \begin{cases} X_x = p - 2k\dfrac{\partial u}{\partial x} \,, \quad X_y = Y_x = -k\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \\[2ex] Y_y = p - 2k\dfrac{\partial v}{\partial y} \,, \quad Y_z = Z_y = -k\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\[2ex] Z_z = p - 2k\dfrac{\partial w}{\partial z} \,, \quad Z_x = X_z = -k\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \end{cases}$$

Nel caso di moti « lenti », cioè tali che si possano trascurare i quadrati ed i prodotti di u, v, w e loro derivate, le (1) assumono la forma più semplice

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(U - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu \nabla^2_u \,, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(U - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu \nabla^2_v \,, \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(U - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu \nabla^2_w \,. \end{cases}$$

[1] Vedi per es. Basset, op. cit., oppure le belle *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*, del sig. M. Brillouin, Paris, 1907.

Circa le condizioni relative all'attrito alle pareti si possono considerare due casi: che si abbia aderenza completa, ciò che si verifica quando i liquidi bagnano la parete, oppure che vi sia scorrimento parziale del liquido sulla parete. Considerando il caso dell'aderenza completa la condizione relativa alla parete è la seguente: la velocità del fluido è uguale a quella della parete con cui è in contatto.

2. Una sfera di raggio a, immersa in un liquido indefinito, sia dotata di moto traslatorio, il suo centro descrivendo con la velocità $V(t)$ una linea retta, che assumiamo per asse z. Supporremo che vi sia simmetria rispetto alla direzione del moto, cioè che il moto del liquido abbia luogo, anche inizialmente, in piani passanti per l'asse z e sia lo stesso in tutti i piani: esso può allora essere determinato per mezzo della funzione di corrente di Stokes. Supporremo inoltre la velocità del moto traslatorio della sfera tale che il moto del liquido abbia sempre il carattere di moto lento; valgono quindi per esso le equazioni (4), le quali sono riferite ad assi fissi.

Riferiamoci invece ad assi passanti per il centro della sfera, descrivente con la velocità $V(t)$ l'asse z, e sia ζ la sua distanza dall'origine fissa al tempo t. Seguitando a chiamare x, y, z le coordinate dei punti, riferite al centro della sfera come origine, essendo $w = f(x, y, z + \zeta, t)$ sarà

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} V(t) = \frac{\partial f}{\partial t}$$

giacchè il secondo termine, essendo dell'ordine del quadrato della velocità, deve essere trascurato per l'approssimazione considerata. Le equazioni (4) conservano quindi la stessa forma, siano esse riferite agli assi fissi o mobili coll'origine nel centro della sfera.

Il moto del liquido avvenendo in piani passanti per l'asse z, ed essendo lo stesso per tutti, conviene servirci delle coordinate polari r, ϑ, φ.

La componente secondo φ della velocità di una generica particella fluida è manifestamente nulla; dette R, θ le componenti secondo r, ϑ (nel senso in cui crescono gli argomenti) avremo:

$$(5) \qquad \begin{cases} u = (R \operatorname{sen} \vartheta + \theta \cos \vartheta) \cos \varphi , \\ v = (R \operatorname{sen} \vartheta + \theta \cos \vartheta) \operatorname{sen} \varphi , \\ w = R \cos \vartheta - \theta \operatorname{sen} \vartheta . \end{cases}$$

Le equazioni del moto del liquido in coordinate polari, tutto essendo indipendente da φ, sono quindi [1]

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(U - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu\left(\nabla^2 R - \dfrac{2R}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial \theta}{\partial \vartheta} - \dfrac{2\theta}{r^2}\operatorname{cotg}\vartheta\right), \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \vartheta}\left(U - \dfrac{p}{\varrho}\right) + \nu\left(\nabla^2 \theta + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial R}{\partial \vartheta} - \dfrac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}\theta\right), \end{cases}$$

$$(7) \qquad \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} + \frac{2R}{r} + \frac{\theta}{r}\operatorname{cotg}\vartheta = 0 ,$$

[1] Basset, op. cit., pag 244.

dove il simbolo ∇^2 è definito da

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\operatorname{sen}\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right).$$

Indicando con ψ la funzione di corrente di Stokes si può porre

$$\text{(8)} \qquad R = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \quad , \quad \theta = -\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial \psi}{\partial r} ;$$

così resta intanto soddisfatta la (7).

L'equazione a cui deve soddisfare la ψ si ottiene eliminando $U - \frac{p}{\varrho}$ fra le (6); le condizioni ai limiti si hanno ricordando che la velocità del fluido per $r = a$ deve essere uguale a quella dei punti della sfera, quindi

$$(R)_{r=a} = V(t) \cos\vartheta \qquad (\theta)_{r=a} = -V(t) \operatorname{sen}\vartheta ;$$

all'infinito poi il liquido deve rimanere in quiete. Ciò dà per la ψ le condizioni

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\right)_{r=a} = V(t) \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \quad , \quad \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{r=a} = V(t) \operatorname{sen}^2\vartheta , \\ \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}\right)_{r=\infty} = 0 \quad , \quad \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{r=\infty} = 0 , \end{cases}$$

a cui deve aggiungersi quella relativa allo stato iniziale.

Si riesce a rendere il problema indipendente da ϑ ponendo

$$\text{(10)} \qquad \psi = \operatorname{sen}^2\vartheta \, . \, f(r, t) ;$$

si trova infatti che per soddisfare all'equazione indefinita, risultante dall'eliminazione di $U - \frac{p}{\varrho}$ fra le (6), è necessario e basta che la f verifichi la

$$\text{(11)} \qquad \Omega\left(r\Omega - \frac{\partial}{\partial t}\right) f = 0 ,$$

con $\Omega f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2f}{r^2}$. Dalle (9) seguono le condizioni ai limiti

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} (f)_{r=a} = \frac{a^2 V(t)}{2} \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{r=a} = aV(t) , \\ \left(\frac{f}{r^2}\right)_{r=\infty} = 0 \quad , \quad \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{r=\infty} = 0 ; \end{cases}$$

la condizione iniziale sarà della forma

$$\text{(12)}' \qquad (f)_{t=0} = \chi(r) ,$$

essendo, a norma della (10), $\operatorname{sen}^2 \vartheta \,.\, \chi(r)$ la funzione di corrente caratterizzante lo stato iniziale del fluido. Per l'ipotesi ammessa dell'aderenza completa del liquido alla superficie della sfera le condizioni (12) dovranno valere anche per $t = 0$; questo porta per la $\chi(r)$

$$(13) \qquad \begin{cases} \chi(a) = \dfrac{a^2}{2} \mathrm{V}(0) \quad , \quad \left(\dfrac{\partial \chi}{\partial r}\right)_{r=a} = a\mathrm{V}(0) \,, \\ \left(\dfrac{\chi}{r^2}\right)_{r=\infty} = 0 \quad , \quad \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \chi}{\partial r}\right)_{r=\infty} = 0 \,. \end{cases}$$

Posto

$$(14) \qquad \nu \Omega f - \frac{\partial f}{\partial t} = f_0 \,,$$

la (11) diviene

$$\Omega f_0 = \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} f_0 = 0 \,,$$

il cui integrale generale è

$$f_0 = \frac{\mathrm{C}_1}{r} + r^2 \mathrm{C}_2 \,,$$

con C_1, C_2 costanti rispetto ad r ma funzioni arbitrarie dell'altra variabile t: gioverà designarle con $-\dfrac{d\omega}{dt}$, $-\dfrac{d\sigma}{dt}$. Essendo così $f_0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{d\omega}{dt} - r^2 \dfrac{d\sigma}{dt}$, ove si ponga

$$(15) \qquad f = f_1 + \frac{\omega}{r} + r^2 \sigma$$

la (14) si semplifica in

$$(14)' \qquad \nu \Omega f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0 \,.$$

Conviene eseguire un'ulteriore trasformazione sostituendo all'incognita f_1 una funzione f_2, legata ad essa dalla relazione

$$(16) \qquad f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{f_1}{r} \,;$$

da questa si trae, derivando rispetto a t e tenendo conto della (14)',

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \Omega f_1 + \frac{1}{r} \Omega f_1 \right) = \nu \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} \,.$$

Essendo f_2 integrale di quest'ultima equazione la (16) dà per f_1

$$f_1 = \frac{1}{r} \int r f_2 \, dr \,:$$

mettendovi in evidenza il raggio a della sfera come limite inferiore di integrazione si può scrivere

$$f_1 = \frac{1}{r}\int_a^r \alpha f_2(\alpha, t)\, d\alpha + \frac{C}{r} \tag{17}$$

dove la costante C di integrazione (funzione di t) va presa in modo da soddisfare la (14)'.

Del resto per il nostro scopo, che è di risalire alla f, si può senz'altro prescindere dal termine $\frac{C}{r}$ poichè, attesa l'arbitrarietà di ω, esso rimane incluso in $\frac{\omega}{r}$. Così dalle (15) e (17) si ha infine

$$f = \frac{1}{r}\int_a^r \alpha f_2(\alpha, t)\, d\alpha + \frac{\omega}{r} + r^2\sigma, \tag{18}$$

dovendovisi risguardare f_2 integrale dell'equazione della propagazione del calore in un filo,

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}. \tag{19}$$

Le condizioni ai limiti (12), (12)', ove si introduca per f il valore (18), divengono

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\omega}{a} + a^2\sigma = \frac{a^2}{2}\mathrm{V}(t)\ ,\ (f_2)_{r=a} - \frac{\omega}{a^2} + 2a\sigma = a\mathrm{V}(t)\,, \\ \left[\frac{1}{r^3}\int_a^r \alpha f_2\, d\alpha + \frac{\omega}{r^3}(r^3) + \sigma\right]_{r=\infty} = 0\,, \\ \left[\frac{f_2}{r} - \frac{1}{r^3}\int_a^r \alpha f_2\, d\alpha - \frac{\omega}{r_3} + 2\sigma\right]_{r=\infty} = 0\,, \\ \frac{1}{r}\int_a^r \alpha(f_2)_{t=0}\, d\alpha + \frac{1}{r}(\omega)_{t=0} + r^2(\sigma)_{t=0} = \chi(r)\,. \end{array}\right. \tag{20}$$

A queste si soddisfa prendendo

$$\sigma = 0 \quad , \quad \omega = \frac{a^3}{2}\mathrm{V}(t)$$

ed imponendo ad f_2 le condizioni

$$(f_2)_{r=a} = \frac{3a}{2}\mathrm{V}(t) \quad , \quad (f_2)_{t=0} = \frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\chi}{r} \quad , \quad \lim_{r=\infty} f_2 = 0\,. \tag{21}$$

Riepilogando: si ha per la funzione di corrente

$$\psi = \mathrm{sen}^2\vartheta \left\{\frac{1}{r}\int_a^r \alpha f_2(\alpha, t)\, d\alpha + \frac{a^3\mathrm{V}(t)}{2r}\right\}, \tag{22}$$

dove f_2 è l'integrale della (19) caratterizzato dalle (21): l'espressione della f_2 è [1]:

$$
(23)\qquad \begin{aligned} f_2(r\,,t) = {} & \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\int_a^\infty \left(\frac{\partial\chi}{\partial\beta}+\frac{\chi}{\beta}\right)\left[e^{\frac{-(\beta-r)^2}{4\nu t}} - e^{\frac{-(\beta-2a+r)^2}{4\nu t}}\right]d\beta + \\ & + \frac{3a}{4\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \mathrm{V}(\tau)\, e^{\frac{-(r-a)^2}{4\nu(t-\tau)}}\,(r-a)\,(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\,d\tau. \end{aligned}
$$

La ψ così determinata risolve in modo generale il problema del moto lento provocato nel fluido dalla traslazione della sfera.

Se si suppone V costante e t sufficientemente grande, perchè il moto della sfera sia sensibilmente divenuto stazionario, la (23) dà per f_2,

$$
\lim_{t=\infty} f_2 = \frac{3a\mathrm{V}}{\sqrt{\pi}}\lim_{t=\infty}\int_{\frac{r-a}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} e^{-\zeta^2}\,d\zeta = \frac{3a\mathrm{V}}{2}\,;
$$

segue allora dalla (22)

$$
\psi = \frac{\mathrm{V}a^2}{4}\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\left\{\frac{3r}{a}-\frac{a}{r}\right\},
$$

che è la nota espressione, data da Stokes, corrispondente al caso del moto stazionario della sfera.

3. Calcoliamo la resistenza diretta Z che la sfera incontra muovendosi nel liquido viscoso; essa è

$$
\mathrm{Z} = \int_\sigma (\mathrm{Z}_x\cos nx + \mathrm{Z}_y\cos ny + \mathrm{Z}_z\cos nz)\,d\sigma\,,
$$

dove n indica la normale ad un generico elemento superficiale $d\sigma$ della sfera (volta verso l'esterno). Per le (3) e (5) si ha

$$
\begin{aligned} \mathrm{Z} = 2\pi a^2\int_0^\pi \Bigg[& \left(p - 2k\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial r}\right)\cos\vartheta + \\ & + k\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial\vartheta}-\frac{\theta}{r}\right)\mathrm{sen}\,\vartheta\Bigg]_{r=a}\mathrm{sen}\,\vartheta\,d\vartheta\,, \end{aligned}
$$

quindi dalle (8), (21), (22) risulta

$$
\mathrm{Z} = 2\pi a\int_0^\pi \left\{(p)_{r=a}\,a\cos\vartheta + k\left[\frac{3}{2}\mathrm{V}(t) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\right)_{r=a}\right]\mathrm{sen}^2\,\vartheta\right\}\mathrm{sen}\,\vartheta\,d\vartheta\,.
$$

[1] Vedi la mia Nota: *Sull'equazione della propagazione del calore in un filo*, Rend. Acc. Lincei, 5 maggio 1907.

Si osservi che è

$$2\int_0^\pi (p)_{r=a} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta = -\int_0^\pi \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_{r=a} \operatorname{sen}^2\vartheta \, d\vartheta,$$

e che dalle (6) si ricava

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Omega \psi\right],$$

quindi, poichè risulta dalle (21), (22) che

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu\Omega\psi\right]\right\}_{r=a} = \operatorname{sen}^2\vartheta \left\{\frac{\nu}{a}\left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\right)_{r=a} - \frac{3\nu V(t)}{2a} - \frac{a}{2}V'(t)\right\},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} Z = 6\pi a k V(t) + \frac{2}{3}\pi a^3 \varrho V'(t) - 4\pi a k \left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\right)_{r=a} - \\ - \pi a^2 \varrho \int_0^\pi \left(\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right)_{r=a} \operatorname{sen}^2\vartheta \, d\vartheta. \end{aligned} \tag{24}$$

Resta ancora da calcolare $\left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\right)_{r=a}$; poniamo per brevità

$$u_1 = (\nu t)^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{\frac{-(\beta-r)^2}{4\nu t}} - e^{\frac{-(\beta-2a+r)^2}{4\nu t}} \right\}, \quad u_2 = \nu^{-\frac{1}{2}} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-(r-a)^2}{4\nu(t-\tau)}};$$

allora la (23) si può scrivere

$$2\sqrt{\pi} f_2(r, t) = \int_a^\infty \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta}\right) u_1 \, d\beta - 3a\nu \int_0^t V(\tau) \frac{\partial u_2}{\partial r} \, d\tau,$$

e quindi

$$2\sqrt{\pi}\frac{\partial f_2}{\partial r} = \int_a^\infty \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta}\right) \frac{\partial u_1}{\partial r} \, d\beta - 3a\nu \int_0^t V(\tau) \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} \, d\tau.$$

Soddisfacendo u_2 all'equazione

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = 0$$

si ottiene

$$\nu \int_0^t V(\tau) \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} \, d\tau = -\int_0^t V(\tau) \frac{\partial u_2}{\partial \tau} \, d\tau = V(0)\,(u_2)_{\tau=0} + \int_0^t V'(\tau) u_2 \, d\tau,$$

essendo $(u_2)_{\tau=t} = 0$; quindi

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi}\left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\right)_{r=a} = \int_a^\infty \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a} d\beta - 3aV(0)\,(u_2)_{\substack{\tau=0\\ r=a}} - \\ - 3a \int_0^t V'(\tau)\,(u_2)_{r=a} \, d\tau. \end{aligned}$$

Si osservi inoltre che

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a} = -2\,\frac{\partial}{\partial \beta}\,(u_2)_{\substack{\tau=0\\ r=\beta}},$$

perciò

$$\int_a^\infty \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta}+\frac{\chi}{\beta}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a} d\beta = 2\left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta}+\frac{\chi}{\beta}\right)_{\beta=a} (u_2)_{\substack{\tau=0\\ r=a}} +$$

$$+\,2\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta}+\frac{\chi}{\beta}\right)(u_2)_{\substack{\tau=0\\ r=\beta}}\, d\beta\,;$$

e ricordando che per le (13) è

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta}+\frac{\chi}{\beta}\right)_{\beta=a} = \frac{3}{2}\,a\mathrm{V}(0)\,,$$

risulta

$$2\sqrt{\pi}\left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\right)_{r=a} = 2\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta}+\frac{\chi}{\beta}\right)(u_2)_{\substack{\tau=0\\ r=\beta}}\, d\beta - 3a\int_0^t \mathrm{V}'(\tau)\,(u_2)_{r=a}\, d\tau\,.$$

Abbiamo così finalmente per la resistenza

$$\begin{aligned} \mathrm{Z} = {} & 6\pi a k\mathrm{V}(t) + \frac{2}{3}\pi a^3 \varrho \mathrm{V}'(t) + 6a^2\sqrt{\pi k \varrho}\int_0^t \frac{\mathrm{V}'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \\ & - \frac{4a\sqrt{\pi k\varrho}}{\sqrt{t}}\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta}+\frac{\chi}{\beta}\right) e^{\frac{-(\beta-a)^2}{4\nu t}}\, d\beta - \pi a^2 \varrho \int_0^\pi \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \vartheta}\right)_{r=a} \operatorname{sen}^2\vartheta\, d\vartheta. \end{aligned} \tag{25}$$

Per $\mathrm{V}=0$ essa si riduce, quando il liquido sia inizialmente in quiete, all'ultimo termine, che rappresenta manifestamente la spinta idrostatica dovuta al campo di forza agente sul sistema.

Se il liquido non è soggetto a forze esterne, ove si supponga V costante e t abbastanza grande, perchè il moto sia divenuto sensibilmente stazionario, si è ricondotti alla nota formula di Stokes

$$\mathrm{Z} = 6\pi a k \mathrm{V}.$$

Conoscendo la resistenza che la sfera incontra nel suo movimento, è naturale il proporsi lo studio del moto della sfera nel liquido, supposto che la sfera ed il liquido siano soggetti alla gravità. Ma di ciò in una prossima Nota.

Meccanica. — *Interpretazione dell'equazione funzionale che regge la caduta di una sfera, in un liquido viscoso.* Nota del prof. G. Picciati, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.