ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Un'osservazione sugli inviluppi dei sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota di C. ROSATI, presentata dal Socio E. BERTINI.

In una recente Nota [1] il prof. Castelnuovo è riuscito a dare la proprietà caratteristica dei sistemi algebrici semplicemente infiniti di gruppi di punti equivalenti appartenenti ad una curva algebrica, facendo vedere che sopra una curva del genere π una serie ∞^1 irriducibile di gruppi di n punti, di indice ν, possiede un numero di punti doppî $\leq 2\nu[n + \pi - 1]$, il limite superiore essendo raggiunto quando e soltanto quando la serie è costituita da gruppi fra loro equivalenti.

Il detto teorema è stato dal sig. Torelli [2] generalizzato ai sistemi algebrici di gruppi di punti più volte infiniti, e da tale generalizzazione egli ha dedotto un criterio aritmetico per decidere quando un sistema algebrico di curve sopra una superficie algebrica sia contenuto in un sistema lineare.

Un'altra proprietà caratteristica dei sistemi algebrici di curve contenuti in un sistema lineare, e subito estendibile a varietà qualunque, si può pure dedurre con considerazioni semplicissime dal teorema di Castelnuovo, la quale proprietà, per quanto dedotta in modo quasi immediato, mi pare possa presentare un qualche interesse.

1. Si abbia sopra una superficie algebrica F un sistema algebrico irriducibile S di curve algebriche, e si indichi con ν il suo indice, (numero delle curve uscenti da un punto generico di F), e con π il suo genere, cioè il genere della curva φ i cui punti rappresentano le curve di S. Ad una curva generica di S corrisponde un punto di φ, ma può darsi che a qualche curva speciale di S corrisponda più di un punto di φ. Se ad una curva C di S corrispondono k punti di φ dei quali α_1 siano tra loro infinitamente vicini, α_2 pure infinitamente vicini, ecc. $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots = k)$, la curva C sarà un elemento multiplo del sistema S, e i numeri $\alpha_1 - 1$, $\alpha_2 - 1$, ecc. (≥ 1) si diranno i suoi *ranghi* sulla superficie F. Chiameremo *inviluppo*

(1) Cfr. Castelnuovo, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Atti della R. Accademia dei Lincei, 1906).

(2) Cfr. la Nota di Torelli, *Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1907), nella quale trovasi il notevole risultato: *Sopra una superficie algebrica, della quale* I *indichi l'invariante di* Zeuthen-Segre, *un sistema algebrico irriducibile ∞^1 di curve di genere p prive di punti multipli variabili, che abbia il grado n, l'indice ν e σ punti base, possiede al più* $\nu(n + \sigma + 4p + \mathrm{I})$ *curve dotate di punto doppio. Se il limite è raggiunto, e solo in tal caso, il sistema è contenuto totalmente in un sistema lineare.*

del sistema S il luogo dei punti di F per cui due delle ν curve uscenti da esso coincidono in un medesimo elemento di S, cosicchè tale luogo sarà costituito dall'ordinario inviluppo (luogo dei punti d'intersezione di due curve infinitamente vicine) e dagli elementi multipli del sistema S che hanno almeno uno dei ranghi maggiore di zero. Quando nel seguito parleremo dell'inviluppo di S intenderemo senz'altro l'insieme dell'ordinario inviluppo e di ciascun elemento multiplo del sistema stesso contato con un ordine di molteplicità uguale alla somma dei suoi ranghi.

Alle ν curve di S uscenti da un punto di F corrisponde un gruppo G di ν punti sulla curva φ; variando il punto sulla superficie F, il gruppo G descrive su φ una serie ∞^2 Σ birazionalmente identica alla superficie F o ad una involuzione ivi esistente, nel caso che il sistema non sia semplice. Si consideri ora su F una curva A che incontri la curva generica C del sistema S in m punti; ad un punto variabile su questa curva corrisponde un gruppo di Σ variabile in una serie ∞^1 γ di indice m; ad un punto di intersezione di A con l'inviluppo di S corrisponde su φ un gruppo di γ contenente due punti infinitamente vicini. Ma per il teorema di Castelnuovo il numero dei punti doppi della serie γ è $\leq 2m[\nu+\pi-1]$, il segno $=$ avendosi solo quando la serie γ è costituita da gruppi tutti equivalenti. Se dunque il numero dei punti d'intersezione di A con l'inviluppo di S è $= 2m[\nu+\pi-1]$, e la curva A appartiene ad un sistema continuo almeno ∞^1 di gdaro >0, variando A entro tale sistema, il numero dei punti d'intersezione di A coll'inviluppo di S rimarrà costante, la serie γ che le corrisponde entro Σ descriverà tutta Σ e sarà sempre costituita da gruppi equivalenti, e poichè due serie γ hanno sempre almeno un gruppo comune, tutta la serie Σ sarà costituita da gruppi equivalenti. Allora per un teorema del prof. Severi (¹) il sistema S è contenuto totalmente in un sistema lineare.

Possiamo dunque enunciare:

« *Dato sopra una superficie algebrica* F *un sistema algebrico irriducibile* ∞^1 S *di curve algebriche, di indice* ν *e di genere* π, *una curva*

(¹) Cfr. il n.° 2 della bella Memoria del Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche,* (Annali di Matematica, Serie III, tomo XII), nella quale, con l'uso degl'integrali finiti di Picard relativi alla superficie, si danno le condizioni perchè un sistema algebrico di curve sia contenuto in un sistema lineare, e se ne deducono varie proprietà, fra le quali una dimostrazione veramente semplice del teorema (che è il risultato di recenti ricerche di Severi, Picard, Enriques, Castelnuovo, al quale se ne deve la determinazione ultima) che afferma essere il numero di detti integrali uguale all'irregolarità della superficie.

Il Severi stesso è ritornato sul teorema di Abel negli altri due lavori, *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche, e alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard* (Rendiconti di Palermo, 1906), e *Osservazioni varie di Geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (Atti del R. Istituto veneto 1905-06).

A *che incontri la curva generica del sistema in* m *punti, incontrerà il suo inviluppo in un numero di punti* $\leq 2m[\nu + \pi - 1]$: *se il limite superiore è raggiunto e la curva* A *è atta a individuare un sistema continuo di grado* ≥ 0 , *il sistema* S *è contenuto totalmente in un sistema lineare* ».

Prendendo per A una sezione piana (o iperpiana), si ottiene il teorema:

« *L'ordine dell'inviluppo di un sistema algebrico irriducibile (di* ∞^1 *indice* ν *e di genere* π*) di curve algebriche di ordine* m *non può superare il numero* $2m[\nu + \pi - 1]$; *se il limite superiore è raggiunto, il sistema algebrico è contenuto totalmente in un sistema lineare* ».

Ricordando che le superficie regolari sono caratterizzate dal non possedere sistemi continui di curve algebriche non contenuti in sistemi lineari ([1]), si ha:

« *Una proprietà caratteristica delle superficie algebriche regolari è che in esse l'inviluppo di ogni sistema algebrico irriducibile* ∞^1 *di indice* ν , *di genere* π , *di curve algebriche dell'ordine* m *ha l'ordine massimo* $2m[\nu + \pi - 1]$ ».

2. L'estensione del teorema dimostrato al caso di una varietà qualunque si fa immediatamente. Entro una varietà V_n (ad n dimensioni) immersa nello spazio S_r si abbia un sistema algebrico irriducibile S semplicemente infinito di varietà V_{n-1} (ad $n - 1$ dimensioni), di indice ν e di genere π , e sia I il suo inviluppo, del quale intendiamo sempre faccia parte ogni elemento multiplo di S con una molteplicità uguale alla somma dei suoi ranghi. Sulla curva φ di genere π, immagine del sistema S, si avrà una serie algebrica Σ ∞^n di gruppi di ν punti, birazionalmente identica alla varietà V, se il sistema S è semplice; se invece le ν varietà di S passanti per un punto hanno comuni ∞^k punti costituenti una varietà ω_k , la serie Σ sarà ∞^{n-k} e birazionalmente identica alla totalità delle ω_k. Un S_{r-n+1} generico di S_r taglierà la V_n in una curva C e la varietà generica del sistema S in m punti, se m è l'ordine di tale varietà. Alla curva C corrisponde su φ una serie ∞^1 di gruppi di ν punti contenuta in Σ e di indice m , la quale avrà un numero di punti doppî $\leq 2m[\nu + \pi - 1]$. Se il limite è raggiunto, variando l' S_{r-n+1} entro l' S_r e applicando il teorema di Severi, si ottiene:

« *L'inviluppo di un sistema semplicemente infinito irriducibile (di indice* ν *e di genere* π*) di varietà ad* $n - 1$ *dimensioni e di ordine* m *contenuto entro una varietà ad* n *dimensioni ha l'ordine* $\leq 2m[\nu + \pi - 1]$; *se il limite superiore è raggiunto, e solo allora, il sistema è totalmente contenuto in un sistema lineare. Il limite sarà costantemente raggiunto per ogni sistema continuo, se la varietà è regolare* ([2]) ».

([1]) Cfr. Enriques, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (Atti della R. Accademia di Bologna, 1905).

([2]) Ricordiamo che si dice regolare una varietà ad n dimensioni priva di sistemi continui completi non lineari di varietà ad $n - 1$ dimensioni.

3. Dalle considerazioni precedenti si può far discendere l'estensione a due varietà qualunque di un teorema che il Severi ha dimostrato per le corrispondenze a valenza zero fra una superficie e una curva, e fra una varietà e una curva [1].

Fra i punti di due varieta V_r e V_s (ad r e ad s dimensioni) esista una corrispondenza algebrica che associ ad un punto generico di V_r una varietà V_{s-1} (ad $s-1$ dimensioni) entro la V_s; se tale V_{s-1} nasce da ∞^i punti di V_r costituenti una varietà ω_i ($i \geq 0$), variando il detto punto entro la V_r, la V_{s-1} corrispondente descriverà entro V_s un sistema algebrico ∞^{r-i}, che chiameremo S, birazionalmente identico alla varietà delle ω_i. Alle ∞^{r-i-1} V_{s-1} di S uscenti da un punto generico di V_s corrisponderanno entro V_r ∞^{r-i-1} ω_i le quali descriveranno una varietà V_{r-1}; se le varietà di S uscenti da un punto hanno ∞^k punti comuni ($k \geq 0$) costituenti una varietà π_k, col variare del detto punto entro V_s la V_{r-1} descriverà entro V_r un sistema algebrico ∞^{s-k}, che diremo R, birazionalmente identico alla varietà delle π_k. Dimostriamo che *se uno dei due sistemi* R *od* S *è costituito da varietà tutte equivalenti, anche l'altro è totalmente contenuto in un sistema lineare.*

Ammetteremo dapprima $i=0$ $k=0$ e che le varietà ω_i e π_k si riducano ciascuna a un punto cioè che i sistemi R ed S siano semplici. Supposte tutte equivalenti le varietà di R, scegliamo entro S un sistema ∞' Γ di indice ν e di genere π e una curva D che tagli la varietà generica di S (e quindi di Γ) in n punti. Alla curva D corrisponderà entro la V_r un sistema ∞' Δ contenuto in R e di indice n, e al sistema Γ una curva C del genere π che taglierà in ν punti la varietà generica di R. Le varietà del sistema Δ segneranno sulla curva C gruppi di ν punti di una serie di indice n contenuta in una serie lineare, perchè le varietà di R sono equivalenti. Per il teorema di Castelnuovo questa serie avrà dunque $2n[\nu+\pi-1]$ punti doppi; esistono cioè $2n[\nu+\pi-1]$ varietà di Δ che toccano la curva C. A queste varietà corrispondono entro la V_s i punti della curva D per cui passano due varietà di Γ infinitamente vicine, cioè i punti d'incontro di D con l'inviluppo di Γ. Per il teorema del n.° precedente, il sistema Γ è contenuto totalmente in un sistema lineare, e perciò le varietà di S sono tutte equivalenti.

Applicando il criterio generale di Torelli (cfr. Torelli, l. c.) relativo ai sistemi algebrici di gruppi di punti più volte infiniti, si vede similmente che: « *Se si indicano con* $m_1\, m_2 \ldots m_{r-1}$ *gli ordini delle rispettive varietà* $V_{r-2}, V_{r-3}, \ldots V_0$ *intersezioni di* $2, 3, \ldots r$ *varietà generiche del sistema (supposto semplice), dimodochè sarà* m_{r-1} *il suo grado, ed ammesso che non esistano elementi multipli con ranghi maggiori dell'unità, gli ordini delle varietà* $W_{r-2}, W_{r-3}, \ldots W_0$ *luoghi dei punti per cui passano rispettivamente* $3, 4, \ldots, r+1$ *varietà infinitamente vicine del sistema non possono superare rispettivamente i numeri* $3m_1[\nu+2\pi-2], 4m_2[\nu+3\pi-3], \ldots (r+1)m_{r-1}[\nu+r\pi-r]$*; quando uno di questi limiti è raggiunto, lo saranno anche gli altri, e il sistema sarà contenuto in un sistema lineare* ».

[1] Cfr. Severi, *Il teorema di Abel* ecc. (l. c.).

4. Prima di passare al caso generale, sarà utile dimostrare un lemma, sui sistemi algebrici composti. Si abbia entro una varietà V_r un sistema algebrico *irriducibile* ∞^s, che indicheremo con R, di varietà V_{r-1}, tale che le ∞^{s-1} varietà V_{r-1} uscenti da un punto generico di V_r abbiano comune tutta una varietà ω_i (riducibile o irriducibile) contenente quel punto, (per $i=0$ la ω_i si riduca a un certo numero di punti); io dico che *se le varietà di* R *sono equivalenti, il sistema lineare minimo definito da* R *è pure composto con le varietà* ω_i.

Indichiamo con $|R|$ il sistema lineare minimo ∞^t contenente R e riferiamo proiettivamente le varietà di $|R|$ ai punti di uno spazio lineare S_t. Alle varietà del sistema algebrico R corrisponderanno i punti di una V_s *irriducibile* e *appartenente* ad S_t; alle ∞^{s-1} varietà di R uscenti da un punto P generico di V_r corrisponderanno i punti della V_{s-1} intersezione della V_s con un certo iperpiano π. Se le ∞^{t-1} varietà del sistema $|R|$ uscenti da P non contenessero tutta la ω_i, scegliamo un punto T della ω_i che non sia comune alle dette ∞^{t-1} varietà; ad esso corrisponderà in S_t un iperpiano τ *distinto* da π e contenente tutta la V_{s-1} intersezione di π con la V_s. Ne consegue che la V_{s-1} apparterrebbe al più ad un S_{t-2} e quindi la varietà *irriducibile* V_s apparterrebbe al più ad un S_{t-1} contro l'ipotesi che sia ∞^t il sistema lineare *minimo* cui appartiene il sistema algebrico R.

5. Ritorniamo ora al caso generale in cui i sistemi R ed S non siano semplici e, ricordando le notazioni del principio del n.° 3, indichiamo con $V^\star_{r-i}$ e con $V^\star_{s-k}$ le varietà, in corrispondenza razionale in un sol senso con le varietà date, immagini rispettive delle totalità delle ω_i e delle π_k, e con $R^\star$ ed $S^\star$ i sistemi algebrici semplici di varietà V_{r-i-1} e V_{s-k-1} trasformati di R e di S. Supposte equivalenti le varietà di R, al sistema lineare minimo contenente R, sistema composto con le ω_i, corrisponderà in $V^\star_{r-i}$ un sistema lineare contenente il sistema algebrico $R^\star$; ne consegue che $S^\star$, e perciò anche S, è contenuto in un sistema lineare.

6. Supponendo che il sistema algebrico R, considerato come varietà ∞^{s-k} di elementi, sia una varietà regolare, la $V^\star_{s-k}$, birazionalmente identica ad R, sarà regolare; ed allora il sistema $S^\star$ e perciò anche S e quindi R saranno contenuti totalmente in un sistema lineare. Possiamo dunque enunciare il seguente corollario:

« *Entro una varietà qualunque ad r dimensioni, un sistema algebrico* ∞^s *di varietà ad* $r-1$ *dimensioni, il quale, considerando le sue varietà come elementi, sia una varietà regolare ad s dimensioni, è contenuto totalmente in un sistema lineare* (1) ».

(1) Per $r=2$ $s=1$ si ha un noto teorema di Enriques. Cfr. Enriques, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (Rendiconti di Palermo, 1896).