ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

marino fra la Sicilia sud-occidentale e l'Africa?... Sarà opportuno di vedere come si comporta la gravità sulla costa di Tunisia, e allora si potrà forse, con maggior fondamento, porre in relazione tali fatti gravimetrici coi concetti geologici che si contrastano il campo nell'ardua questione riguardante la possibile antichissima continuità della Sicilia coll'Africa, e nelle conseguenti congetture di sollevamenti od abbassamenti dell'interposto fondo marino.

Matematica. — *Sul problema di Cauchy*. Nota del dott. Eugenio Elia Levi, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

1. Data una equazione alle derivate parziali di ordine n in m variabili, il problema di Cauchy consiste, come è noto, nel determinarne una soluzione che su un'assegnata varietà iniziale ad $m-1$ dimensioni prenda valori assegnati insieme colle sue derivate di ordine $\leq n$ — supposto che i valori assegnati siano compatibili coll'equazione alle derivate parziali medesima e coll'ipotesi di essere i valori delle derivate di una funzione di m variabili su una varietà ad $m-1$ dimensioni [1] —. Ed è pure noto che, quando l'equazione sia analitica, la varietà iniziale sia analitica, ed infine siano pure analitiche le funzioni assegnate su essa, *esiste una ed una sola funzione analitica che risolva il problema* — purchè gli elementi di ordine n determinati dalla varietà iniziale e dalle funzioni assegnate su essa non siano mai caratteristici per l'equazione (in particolare quindi che la varietà e le funzioni assegnate iniziali non costituiscano una molteplicità caratteristica).

Ma quando ci poniamo dal punto di vista delle funzioni di variabile reale, i risultati sono ben più scarsi; sia che, tolta la condizione che l'equazione ed i dati iniziali siano analitici, ci chiediamo se esiste una soluzione che soddisfaccia alle condizioni del problema (*teorema di esistenza*); sia che, pure ammesso, ove occorra, che l'equazione ed i dati iniziali siano analitici, chiediamo se esistano altre soluzioni oltre a quella analitica di cui il teorema sopra rammentato ci assicura (*teorema di unicità*). Chè se lasciamo da parte il caso in cui il problema si può ridurre, senza introduzione di variabili immaginarie, alle equazioni alle derivate ordinarie — come ad esempio quando l'equazione è alle derivate parziali di 1° ordine — nulla è noto all'infuori delle equazioni di secondo ordine di tipo iperbolico in due variabili e di alcune loro estensioni, per cui servono i metodi di Picard e di Riemann [2].

[1] Cosicchè se l'equazione è lineare nelle derivate di ordine n basta assegnare sulla varietà iniziale i valori delle $n-1$ prime derivate normali.

[2] E le loro notevoli estensioni ai casi di più variabili che si raggruppano attorno al metodo del Volterra, ed alle equazioni in più variabili e di ordine superiore dovute a Bianchi, Niccoletti, Fubini, Delassus, Le Roux ecc.

Nella presente Nota vorrei esporre alcune considerazioni che mi paiono atte a mostrare che non nella imperfezione dei nostri mezzi di studio, ma nella natura medesima della questione sta la ragione delle difficoltà incontrate fin qui nella estensione del teorema di esistenza al caso delle funzioni di variabile reale: in quanto che, per restare ad esempio nel caso delle equazioni del secondo ordine in due variabili indipendenti, *il problema di Cauchy non ammette in generale soluzione per le equazioni di tipo ellittico e parabolico*. Invece il teorema di unicità pare rimanga vero, almeno per ipotesi estesissime.

Nel n. 2 richiamo brevissimamente gli enunciati noti relativi al tipo iperbolico, soprattutto perchè dall'immediato confronto risultino più chiare le differenze che presentano i tre casi. I risultati dei nn. 3 e 4 relativi al tipo ellittico hanno la loro base nel carattere analitico delle soluzioni di queste equazioni: essi sono quindi noti nella loro essenza: non credo che però ne siano mai state esplicitamente tratte le conseguenze qui indicate: specialmente quelle del n. 4. Del tutto nuove, per quanto semplici, sono invece le considerazioni dei n. successivi relative alle equazioni paraboliche. Noterò subito che, trattando delle equazioni paraboliche, mi sono limitato all'equazione del calore, sia per la imperfezione delle nostre conoscenze relative a questa classe di equazioni, sia perchè mi parve da preferirsi in questa Nota la brevità e la semplicità alla generalità dei risultati.

2. *Le equazioni iperboliche.* — Teorema di esistenza. — Per le equazioni che si possono ridurre alla forma $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{F}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ il teorema di esistenza si stabilisce — con poche ipotesi relativamente alle derivate della F e delle funzioni iniziali — col metodo delle successive approssimazioni del Picard (¹).

Teorema di unicità. Il metodo delle successive approssimazioni del Picard dimostra nello stesso tempo il teorema di unicità per le equazioni della forma rammentata precedentemente: per le equazioni lineari può anche servire il metodo di Riemann. Fondandoci sul teorema di unicità relativo alle equazioni lineari, si può dedurre il teorema di unicità per le equazioni generali della forma $\mathrm{F}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$, le quali abbiano nell'intorno del sistema dei dati iniziali le caratteristiche reali e distinte — ammesso naturalmente che tanto la F quanto la soluzione di cui si vuol dimostrare l'unicità abbiano un conveniente numero di derivate che qui non precisiamo (²).

(¹) Cfr. la Nota di Picard in Darboux, *Théorie des surfaces*, tomo IV, pp. 353 seg.
(²) Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*. Nota I, pp. 352-354.

3. *Le equazioni ellittiche.* — Ricordiamo che se una equazione

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

dove la F è una funzione analitica, è ellittica in un certo campo, ogni sua soluzione finita e continua insieme colle sue derivate prime, seconde e terze è una funzione analitica di x ed y. Se la F è lineare nelle derivate seconde, per modo che l'equazione si possa ridurre nella forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

è necessario solo supporre che la soluzione abbia derivate prime e seconde e continue ([1]). Da questo teorema segue subito il

Teorema di unicità. Se su una curva AB analitica del piano xy è assegnata una serie (S) semplicemente infinita di elementi del secondo ordine analitica essa pure, e soddisfacente alla $F = 0$ e tale che nell' intorno di essa l'equazione sia ellittica, esiste una sola soluzione finita e continua colle derivate prime seconde e terze la quale contenga (S).

Ed invero pel teorema di Cauchy esiste intanto una soluzione z_1 analitica in un campo contenente *nel suo interno* AB la quale contiene (S). Ove esistesse un'altra funzione z_2 anche solo da una parte di AB e contenente (S), noi la potremmo prolungare al di là di AB colla funzione z_1 ed otterremmo così una nuova funzione z_3 finita e continua colle sue derivate prime, seconde ed anche terze (poichè queste su AB sono univocamente determinate dai dati iniziali) in un campo contenente nel suo interno AB. Quindi pel teorema richiamato sopra, z_3 sarebbe analitica regolare nei punti di AB: quindi coincide con z_1 in virtù dell'ordinario teorema di unicità di Cauchy.

Ove l'equazione sia lineare, dal teorema precedente si possono escludere le condizioni relative alle derivate terze.

4. *Sul teorema di esistenza.* — Richiamando ora un complemento del teorema precedentemente citato relativo al carattere analitico delle soluzioni delle equazioni ellittiche, ci sarà del pari facile dimostrare che *il problema di Cauchy non ammette soluzione quando si assegni che sulla curva analitica iniziale* AB *la soluzione debba ridursi ad una funzione analitica dell'arco* AB, *mentre la sua derivata normale debba ridursi ad una funzione non analitica dell'arco medesimo.*

Per le soluzioni dell'equazione $\Delta_2 z = 0$, non è questo che una immediata conseguenza del noto teorema dello Schwarz ([2]) secondo cui una funzione armonica, che sopra una curva analitica AB si riduca ad una funzione

([1]) Bernstein S., *Sur la nature analytique des solutions des équations* etc. Math. Ann. 59.

([2]) Cfr. ad es. Picard, *Traité d'Analyse,* II, cap. X, 1ª ed. pag. 269-272.

analitica dell'arco è funzione analitica regolare di x ed y nei punti dell'arco medesimo: e quindi in particolare anche la sua derivata normale è funzione analitica regolare dell'arco medesimo. Questo teorema si estende agevolmente alle soluzioni delle più generali equazioni ellittiche con ragionamenti affatto simili a quelli usati dal Picard e dal Bernstein per dimostrare il carattere analitico delle soluzioni di queste equazioni; onde segue la nostra affermazione.

5. *Le equazioni paraboliche.* — Ci limiteremo, come già dicemmo, alle equazioni del tipo $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \frac{\partial z}{\partial y}$, dove a è una costante; od anche all'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$, poichè con una semplicissima trasformazione delle coordinate si può sempre ridurre quello a questo ultimo caso.

È noto che le soluzioni dell'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ non sono in generale funzioni analitiche delle variabili x ed y (¹). Noi dimostreremo che però: *se una soluzione dell'equazione* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ *ammette in un campo* $\boldsymbol{\Gamma}$ *del piano xy derivate prime finite e continue rapporto ad* x *e* y,

1°, *essa ammette le derivate successive di qualunque ordine;*

2°, *sopra ogni segmento di retta caratteristica* $y = \text{cost}$ *interno a* $\boldsymbol{\Gamma}$, *è funzione analitica della variabile* x.

Sia infatti $\mathrm{M} \equiv (x, y)$ un punto interno a $\boldsymbol{\Gamma}$: sia r la caratteristica per M; presi su r due punti $\mathrm{A} \equiv (a, y)$, $\mathrm{B} \equiv (b, y)$ $(a < x < b)$ l'uno da una parte, l'altro dall'altra di M, si conduca un arco s che congiunga A con B, sia interno a $\boldsymbol{\Gamma}$ e stia tutto al disotto di r. È noto che, se la z è funzione di x ed y soddisfacente all'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$, finita e continua insieme colle sue derivate prime in $\boldsymbol{\Gamma}$, detto $x_1 y_1$ un punto mobile su s, il valore di z in $\mathrm{M} \equiv (xy)$ è dato da (²)

$$
(1) \qquad z(xy) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_s \frac{e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4(y-y_1)}}}{\sqrt{y-y_1}} \times
$$
$$
\times \left\{ \left[\frac{\partial z(x_1 y_1)}{\partial x_1} - z(x_1 y_1) \frac{x-x_1}{y-y_1} \right] \cos nx - z(x_1 y_1) \cos ny \right\} ds
$$

(¹) Cfr. Volterra, *Leçons sur l'intégration des équations différentielles etc. professées à Stockholm*, pag. 70.

(²) Che per la validità di (1) sia sufficiente la continuità delle derivate prime risulta evidente dal modo in cui (1) si deduce. Invero se v e u sono soluzioni delle equazioni $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial v}{\partial y_1} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial y_1} = 0$ finite e continue colle loro derivate prime e quindi ancora colle derivate $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, in un campo S limitato da un segmento AB di ca-

n indicando la normale a s nel punto $x_1 y_1$ diretta verso l'interno. Risulta subito da questa formula che le derivate successive rapporto ad x esistono, poichè si ottengono semplicemente derivando sotto il segno integrale: basti notare che la curva s non dipende da x ma solo da y e che, per ogni punto xy *interno* ad AB, la funzione sotto il segno è finita e continua insieme con tutte le sue derivate rapporto x nell'intervallo di integrazione. Si potrebbe dimostrare direttamente che esistono anche le derivate rapporto ad y e quelle miste; però è più semplice osservare che ciò è conseguenza dell'equazione medesima per cui ognuna di queste derivate è uguale ad una conveniente derivata rapporto ad x soltanto.

Sulla medesima formula (1) si fonda la dimostrazione della seconda parte dell'enunciato. Chiamiamo s_ε il tratto dell'arco s che sta al disotto della caratteristica $y_1 = y - \varepsilon$: e poniamo

$$z_\varepsilon(xy) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{s\varepsilon} \frac{e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4(y-y_1)}}}{\sqrt{y-y_1}} \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{\partial z(x_1 y_1)}{\partial x_1} - z(x_1 y_1) \frac{x - x_1}{y - y_1} \right] \cos nx - z(x_1 y_1) \cos ny \right\} ds.$$

Si avrà evidentemente per x reale

$$z(xy) = \lim_{\varepsilon=0} z_\varepsilon(xy). \tag{2}$$

Si immagini fissato y; per ogni coppia di valori di x_1 ed y_1 appartenenti ad s (con $y_1 \mp y$) la funzione sotto il segno d'integrazione è funzione

---

ratteristica e da una curva s che ne congiunga gli estremi stando tutto al disotto di esso si ha

$$0 = \int\int_S \left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\right) - u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \right] dx_1\, dy_1 =$$

$$= \int_s \left\{ \left[v \frac{\partial u}{\partial x_1} - u \frac{\partial v}{\partial x_1} \right] \cos nx_1 - uv \cos ny_1 \right\} ds + \int_{AB} uv\, dx\,.$$

Ponendo $u = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha - y_1}}\, e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4(\alpha-y_1)}}$ $\alpha > x$, $v = z$ e facendo tendere α ad y — supposto che xy tenda ad un punto interno ad AB — si deduce (1). Cfr. Volterra, loc. cit., pp. 65-66. Si deduce di qui che neppure occorre che ambedue le derivate siano finite e continue, ma solo che sia finita e continua la $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, e che $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ — la quale in ogni punto uguaglia la $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ per ipotesi — sia atta all'integrazione sia rispetto ad x che rispetto a y e tale che

$$\int_{y'}^{y''} \frac{\partial z}{\partial y} dy = z_{y''} - z_{y'}\,, \quad \int_{x'}^{x''} \frac{\partial z}{\partial y} dx = \int_{x'}^{x''} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{x''} - \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{x'}.$$

analitica di x. Segue che $z_2(xy)$ è funzione analitica di x. Per mostrare l'analiticità della funzione z in un punto reale $\overline{x}$ del tratto $a \ldots b$ basta mostrare che la (z) vale ancora in un campo complesso contenente nel suo interno $\overline{x}$. Si ponga $x = x' + ix''$: essendo $\overline{x}$ interno all'intervallo $a \ldots b$ si può determinare τ per modo che $(\overline{x} - a)^2$ e $(\overline{x} - b)^2$ siano $> \tau$, e preso allora un numero σ positivo arbitrariamente piccolo, $< \tau$, si consideri il campo complesso C dei valori di x tali che $(x' - a)^2 - x''^2 \geq \sigma$, $(x' - b)^2 - x''^2 \geq \sigma$ (¹); $\overline{x}$ sarà contenuto in C. La formula (2) risulterà evidente, osservando che se x è in C ed $x_1 y_1$ su s, la funzione sotto il segno d'integrazione è finita e continua e tende a zero uniformemente col tendere di y_1 ad y, e cioè che tendono a zero

$$\frac{1}{\sqrt{y - y_1}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4(y-y_1)}} \quad \text{e} \quad \frac{x - x_1}{(y - y)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4(y-y_1)}} .$$

Si scelga un numero ζ tale che quando $y_1 > y - \zeta$, il punto $(x_1 y_1)$ di s sia tale che x_1 sia compreso in uno degli intervalli

$$\left(a - \frac{\sigma}{4(b-a)}\right) \longleftrightarrow \left(a + \frac{\sigma}{4(b-a)}\right), \ \left(b - \frac{\sigma}{4(b-a)}\right) \longleftrightarrow \left(b + \frac{\sigma}{4(b-a)}\right):$$

e si supponga $y > y_1 > y - \zeta$. Si ha allora

$$\left| e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4(y-y_1)}} \right| = e^{-\frac{(x'-x_1)^2 - x''^2}{4(y-y_1)}} < e^{-\frac{\sigma}{8(y-y_1)}}$$

e quindi ancora le funzioni in questione sono in modulo inferiori a

$$\left| e^{-\frac{\sigma}{8(y-y_1)}} \frac{1}{\sqrt{y - y_1}} \right| \quad \text{e} \quad \left| \frac{x - x_1}{\sqrt{y - y_1}} e^{-\frac{\sigma}{8(y-y_1)}} \right|$$

e quindi tendono uniformemente a zero col tendere di y_1 ad y (²).

(¹) Un campo contenuto in questo e di più facile concezione geometrica è il quadrato che si ottiene nel piano delle x conducendo le due rette inclinate di 45° sull'asse reale per i punti $a + \sqrt{\sigma}$ e $b - \sqrt{\sigma}$.

(²) Si riconosce che questo teorema comprende come caso particolare un noto teorema di Weierstrass (*Ueber Functionen einer reellen Veränderlichen*, Berl. Sitz. 1885, Werke, vol. 3). Se ne possono dare varie estensioni: ad esempio la stessa dimostrazione vale a dimostrare che anche le soluzioni delle equazioni della propagazione del calore in 2, 3... variabili $\left(\text{cioè le equazioni del tipo } \Delta_2 u = \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ sono sempre funzioni analitiche delle variabili diverse da t. Una estensione che presenta qualche maggiore difficoltà è invece quella ad equazioni paraboliche più generali: per es. all'equazione con termine noto. Il risultato resta vero (sotto certe condizioni circa il termine noto); si possono seguire per stabilirlo metodi analoghi a quelli indicati da me nello studio delle solu-

7. Dopo ciò, siamo senz'altro in grado di dimostrare il

Teorema di unicità. *Sia un arco* MN *del piano* xy *che mai tocchi nè incontri due volte una caratteristica: se due soluzioni* $z(xy)$ *e* $z_1(xy)$ *dell'equazione* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ *finite e continue insieme colle loro derivate prime, hanno gli stessi valori su* MN *e gli stessi valori prendono pure su* MN *le loro derivate normali, esse sono identiche in quella parte del campo comune di esistenza, che è interna alla striscia compresa fra le due caratteristiche per* M *ed* N (1).

Basterà in vero mostrare che una soluzione z_1 dell'equazione che si annulli insieme colla sua derivata normale su MN e sia finita e continua in un certo campo, è necessariamente nulla in tutta la parte del campo di esistenza contenuta in quella striscia. Supponiamo infatti per maggior generalità che il campo di esistenza di z_1 si stenda da una parte sola di MN: sia MCN un arco di curva interno al detto campo ed alla striscia: dimostrerò che la funzione z_1 è nulla nell'area compresa fra MN ed MCN. Si prolunghi z_1 al di là di MN colla funzione identicamente nulla. La funzione così ottenuta è finita e continua colle sue derivate prime nel campo compreso fra le due caratteristiche per M ed N e MCN. Su ogni caratteristica compresa nella striscia essa è quindi funzione analitica di x; ma essa e le sue derivate sono tutte nulle nei punti di MN: quindi è identicamente nulla. Quindi infine anche z_1 è nulla nel campo MCNM, c. v. d.

Sul teorema di esistenza. *Ma è ora facile trovare dei casi in cui il problema di Cauchy non ammette soluzione.* Si prenda come arco MN un segmento di parallela all'asse delle y: per es. un segmento dell'asse delle y medesimo. Se una soluzione $z(xy)$ esiste in un campo MCNM ad es. a destra di MN ed ha la derivata rapporto ad x nulla su MN, la si potrà prolungare a sinistra di MN. Basterà porre $z(-xy) = z(xy)$: otterremo così una soluzione $z(xy)$ finita e continua insieme colle sue derivate prime in un campo contenente MN *nell'interno.* Nei punti di MN z ammette quindi tutte le derivate successive. Non esiste quindi funzione alcuna che soddisfaccia all'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ e su MN, mentre soddisfa

---

zioni delle equazioni ellittiche (*Sulle equazioni lineari alle derivate parziali totalmente ellittiche,* Rendiconti Lincei, ser. 5ª, vol. 16, 1° sem. 1907, pag. 932): spero di poter tornare fra breve in altro lavoro su questo argomento.

(1) Si noti che condizione essenziale è che MN incontri una volta sola le caratteristiche: ove incontri due volte ogni caratteristica, il teorema di unicità si ha già quando siano dati i soli valori della funzione su MN. Cfr. Volterra, loc. cit., pag. 64.

alla condizione $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, si riduca ad una funzione che ammetta le derivate fino ad un ordine $m > 1$, ma non le derivate $(m + 1)$ esime [1].

E questa osservazione si può estendere: non esiste alcuna soluzione dell'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ la quale su MN, mentre ha la derivata rapporto ad x funzione analitica di y, si riduca ad una funzione di y che ammetta derivate prime, ma non tutte le successive derivate.

Osservazione. — È chiaro che il teorema di unicità e pure queste ultime considerazioni sul teorema di esistenza valgono per le equazioni più generali

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(xy).$$

(1) Possiamo trovare anche dei tipi di funzioni iniziali non ammissibili i quali abbiano tutte le derivate. Per es. sia $P \equiv (0, b)$ un punto di MN; non può esistere una soluzione z che, mentre su MN deve soddisfare la $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, su MP soddisfaccia a $z = 0$ e su PN si riduca alla funzione $f(y) = e^{-\frac{1}{\sqrt{y-b}}}$.

Infatti possiamo, come si vide, supporre che z esista in un campo Γ contenente MN nell'interno. Nel campo comune a Γ ed alla striscia Δ compresa fra le caratteristiche per P ed M, per il teorema di unicità, z è identicamente nulla. Per avere il valore in un punto $Q \equiv (0, y_1)$ di PN si prendano sulla caratteristica per Q due punti $A \equiv (a, y)$ e $B \equiv (-a, y)$ simmetrici rapporto a Q, si conducano per essi le parallele all'asse delle y e siano $A_1 \equiv (ab)$, $B_1 \equiv (-ab)$ i punti in cui queste incontrano la caratteristica per P. Si applichi la (1) del n. 6, prendendo per s l'arco formato da AA_1, BB_1 e da una curva che unisca A_1 con B_1 restando in Δ. L'integrale esteso a questo ultimo tratto è evidentemente nullo onde in (1) restano solo gli integrali estesi ai tratti AA_4 e BB_1: ricordando che

$$z(-a, y) = z(ay), \frac{\partial z(-ay)}{\partial x} = -\frac{\partial z(ay)}{\partial x},$$

si avrà

$$z_Q = z(0, y_1) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_b^{y_1} \frac{e^{-\frac{a^2}{4(y-y_1)}}}{\sqrt{y-y_1}} \frac{\partial z(ay)}{\partial x_1} dy + a \int_b^{y_1} \frac{e^{-\frac{a^2}{4(y-y_1)}}}{(y-y_1)^{3|2}} z(ay)\, dy\right].$$

Quando y_1 tende a b i due integrali del secondo membro divengono infinitesimi di ordine $\geq$ di quello di $\int_b^{y_1} \frac{e^{-\frac{a^2}{4(y-y_1)}}}{\sqrt{y_1-y}} dy$, $\int_b^{y_1} \frac{e^{-\frac{a^2}{4(y-y_1)}}}{(y_1-y)^{3|2}} dy$. Il primo di questi integrali è per $y_1 = b$ infinitesimo di ordine $>$ del secondo. Ma quest'ultimo poi è infinitesimo di ordine $\geq e^{-\frac{a^2}{4(y_1-b)}} \sqrt{y_1-b}$ come si vede con una integrazione per parti. Quindi lo stesso sarà di z.

Ma $e^{-\frac{1}{\sqrt{y_1-b}}}$ è per $y_1 = b$ infinitesimo di ordine $< e^{-\frac{a^2}{4(y_1-b)}} \sqrt{y_1-b}$ quale che sia a^2; quindi la funzione z non può su PN diventare uguale a $e^{-\frac{1}{\sqrt{y-b}}}$.