# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XVI.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

e un peso molecolare 130.24 concordemente al peso molecolare teorico = 132.

Il suo peso specifico a 0° è 0.798.

In questo caso non si forma ottilene.

Risulta da queste esperienze che possono ottenersi senza difficoltà anche i fluoruri degli alcoli superiori, e che fra essi sono assai più stabili quelli degli alcoli primari; nel caso degli alcoli secondari i fluoruri eliminano facilmente acido fluoridrico per dar luogo alla formazione dell'idrocarburo etilenico, come ha osservato Joung nel caso del ioduro d'isoamile e noi in quello del ioduro d'essile secondario. È anche degno di nota il fatto che il nostro fluoruro d'essile per l'azione del sodio non fornisce diessile, ma perde acido fluoridrico per dare essilene, come è pure notevole la facilità con la quale l'acido solforico, anche a freddo, sposta per così dire l'acido fluoridrico dal fluoruro di essile.

**Matematica.** — *Sui gruppi di movimenti.* Nota del dott. SIRO MEDICI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

In una Memoria che è in corso di stampa, negli Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, sui gruppi di rotazioni, cioè sui sottogruppi del gruppo $x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i, k = 1, \dots, n \; ; \; i \neq k)$, sono riuscito a determinare tutti i tipi possibili di quei gruppi: voglio ora dare qui, dei risultati ottenuti alcune applicazioni alla teoria dei gruppi di movimenti.

1. Considerato un $S_n$ di elemento lineare

$$ds^2 = \sum_{ik}^{1\dots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,, \tag{1}$$

perchè esso ammetta la trasformazione infinitesima

$$X = \sum_{k}^{1\dots n} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\,, \tag{2}$$

dove le $\xi$ son funzioni finite e continue delle $x_1, \dots, x_n$, che hanno derivate prime e seconde, in tutto il campo in cui si considerano, occorre e basta sien verificate l'equazioni di Killing

$$\sum_{r}^{1\dots n} \left( \xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ir} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n)\,. \tag{3}$$

Queste sono le equazioni di definizione del gruppo di movimenti ammesso dall'$S_n$:

tale gruppo può contenere al massimo $\frac{n(n+1)}{2}$ trasformazioni indipendenti e queste in un punto generico possono essere tutto al più del prim'ordine.

2. Per un teorema del prof. Fubini [1] un gruppo di movimenti intransitivi si può ridurre con un opportuno cangiamento di variabili ad un gruppo transitivo su un minor numero di variabili. Inoltre un gruppo semplicemente transitivo, per un teorema del prof. Bianchi [2] si può considerare sempre come un gruppo di movimenti; perciò basterà occuparci dei gruppi una volta transitivi, dei gruppi cioè, che oltre $n$ trasformazioni di ordine zero (nell'origine) contengono ancora delle trasformazioni di 1° ordine.

Di queste trasformazioni di 1° ordine si possono determinare i termini di primo grado. Infatti se supponiamo che le linee coordinate nell'origine sieno ortogonali tra loro a due a due (come possiamo sempre fare) e quindi sia $a_{ik} = 0, 1$ (per $x_1 = \cdots = x_n = 0$) secondochè $i \neq k$ o $i = k$, le (3) ci dicono, che se la trasformazione X è di prim' ordine nell'origine, e per conseguenza le $\xi$ nell'origine stessa son nulle, si deve avere

$$X = \sum_{ik}^{1\dots n} c_{ik}\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \cdots$$

I gruppi che dobbiamo considerare avranno dunque per generatrici $n + s$ $(s > 0)$ trasformazioni del tipo

$$P_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots (i = 1, \dots, n), X_l = \sum_{ik}^{1\dots n} c_{lik}\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \cdots (l = 1, \dots, s),$$

dove le parti tralasciate sono almeno di 1° grado nelle $x$ per le $P_i$, e di 2° per le $X_l$ [3]. Se poniamo

$$\overline{X}_l = \sum_{ik}^{1\dots n} c_{lik}\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

le trasformazioni così ottenute formano un gruppo di rotazioni. Per determinare dunque tutti i gruppi di movimenti si dovranno considerare tutti i tipi di gruppi di rotazioni su $n$ variabili, tipi, che come ho detto, si deducono immediatamente dai risultati della mia Memoria citata. Presone uno qualunque e sostituitene le rotazioni generatrici al posto delle $\overline{X}_l$, con che le $c_{lik}$ divengono note, si determinino dalle identità Jacobiane tutte le composizioni dei gruppi compatibili con la forma indicata. Si noti per questo, che ciò richiede solo operazioni algebriche, e che sono, per la

(1) Fubini, *Sugli spazii, che ammettono*, ecc. (Ann. di mat., ser. 3ª, vol. III), n. 1.

(2) Bianchi, *Sugli spazii a 3 dimensioni*, ecc. (Memorie della Società It. dei XL, ser. 3ª, tomo II, 1897).

(3) Cfr. Fubini, *Sulla teoria degli spazii, che ammettono un gruppo conforme* (Atti di Torino, vol. 38, 1903), n. 6.

forma stessa delle trasformazioni, note le alternate tra due X, e che delle alternate tra una P ed una X si conosce la parte, che contiene le P stesse. Per ognuna di queste composizioni basterà poi determinare un particolare gruppo, chè gli altri per un teorema del Lie [1] saranno tutti simili ad esso. Fatto questo per tutti i possibili tipi dei gruppi di rotazione su $n$ variabili si hanno tutti i tipi possibili dei gruppi di movimenti cercati: ma osserviamo che i gruppi così trovati son tutti effettivamente gruppi di movimenti. Per vederlo basta rammentare un altro teorema del prof. Fubini [2] secondo il quale, perchè un gruppo transitivo si possa considerare come gruppo di movimenti, occorre che quel suo sottogruppo $\Gamma$, che lascia fermo un punto A determinato, in cui il gruppo è regolare, trasformi in sè stessa ciascuna quadrica di un sistema di quadriche omotetiche infinitamente vicine ad A. Ora questo è evidente nel nostro caso, quando si prenda per il punto A l'origine. Nel modo detto si trovano dunque tutti e soli i gruppi di movimenti una volta transitivi su $n$ variabili: volendo poi gli elementi lineari degli spazii che li ammettono come gruppi di movimenti, basta integrare le (3) tenendo conto delle condizioni iniziali, che si hanno per le $a_{ik}$.

3. Come esempio applichiamo il metodo al caso di $n = 4$ [3].

I gruppi di rotazioni possibili su 4 variabili sono i 6 seguenti:

1°) $x_1 p_2 - x_2 p_1 + a(x_3 p_4 - x_4 p_3)$;

2°) $x_1 p_2 - x_2 p_1 \;,\; x_3 p_4 - x_4 p_3$;

3°) $x_1 p_2 - x_2 p_1 \;,\; x_1 p_3 - x_3 p_1 \;,\; x_2 p_3 - x_3 p_2$;

4°) $x_1 p_2 - x_2 p_1 + x_3 p_4 - x_4 p_3 \;,\; x_2 p_4 - x_4 p_2 - x_1 p_3 + x_3 p_1 \;,$
$x_1 p_4 - x_4 p_1 + x_2 p_3 - x_3 p_2$;

5°) Il precedente più la rotazione $x_1 p_2 - x_2 p_1 - x_3 p_4 + x_4 p_3$;

6°) Il $G_6$ totale: $x_i p_k - x_k p_i \;(i, k = 1, \dots, 4 \;;\; i \neq k)$;

dove

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, 4).$$

4. Cominciamo dal primo: posto

$$P_i = p_i + \cdots, \quad X = x_1 p_2 - x_2 p_1 + a(x_3 p_4 - x_4 p_3).$$

Si avrà subito

$$(P_1 X) = P_2 + \alpha X \;,\; (P_2 X) = -P_1 + \beta X \;,$$
$$(P_3 X) = a P_4 + \gamma X \;,\; (P_4 X) = -a P_3 + \delta X \,.$$

(1) Lie, *Theorie der Transfgr.* Bd. I, pag. 614.

(2) Fubini, *Sugli spazii....*, n. 6.

(3) La ricerca dei gruppi di movimenti ammessi da $S_4$ è stata compiuta dal Fubini nella Memoria: *Sugli spazii a 4 dimensioni, che ammettono,* ecc. (Ann. di mat., tomo IX, ser. III, 1903), e completata dall'altra Memoria: *Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane* ecc. (Atti dell'Accad. Gioenia, ser. IV, vol. XVII). Noi facciamo nonostante la ricerca per mostrare la rapidità del metodo proposto.

Prendendo al posto di $P_1$ e $P_2$ rispettivamente $P_1 - \beta X$, $P_2 + \alpha X$, si riduce $\alpha = \beta = 0$: se poi $a \neq 0$ nello stesso modo si riduce anche $\gamma = \delta = 0$. Dopo ciò dalle identità Jacobiane tra due P e la X si ha subito, sempre se $a \neq 0$,

$$(P_1 P_2) = KX \quad (P_3 P_4) = K_1 X \quad (P_1 P_3) = (P_1 P_4) = (P_2 P_3) = (P_2 P_4) = 0 .$$

Ed ora scrivendo le identità Jacobiane tra tre delle P si ottiene subito $K = K_1 = 0$: dunque nel caso di $a \neq 0$, si può prendere per il gruppo il gruppo

$$p_1 , p_2 , p_3 , p_4 \;,\; x_1 p_2 - x_2 p_1 + a(x_3 p_4 - x_4 p_3) .$$

Ma allora lo spazio ammettendo le trasformazioni $p_1 , p_2 , p_3 , p_4$ è l' $S_4$ euclideo (¹), ed il gruppo di movimenti considerato non è quello completo ammesso dal gruppo: sicchè si può tralasciare intanto il caso di $a \neq 0$.

Nel caso di $a = 0$, si può supporre come abbiamo detto

$$(P_1 X) = P_2 \;,\; (P_2 X) = - P_1 \;,\; (P_3 X) = \gamma X \;,\; (P_4 X) = \delta X .$$

Dalle identità Jacobiane tra due P e la X vien subito $\gamma = \delta = 0$: scrivendo poi le altre identità Jacobiane si trovano possibili quattro casi

1°) $(P_1 P_2) = 0 \; (P_1 P_3) = \alpha P_1 , (P_2 P_3) = \alpha P_2 , (P_1 P_4) = \beta P_1 ,$
$(P_2 P_4) = \beta P_2 , (P_3 P_4) = 0 ;$

2°) $(P_1 P_2) = \alpha P_3 + KX , (P_1 P_3) = (P_2 P_3) = (P_1 P_4) =$
$= (P_2 P_4) = (P_3 P_4) = 0 ;$

3°) $(P_1 P_2) = 0 , (P_1 P_3) = \alpha P_1 , (P_2 P_3) = \alpha P_2 ,$
$(P_1 P_4) = (P_2 P_4) = 0 \; (P_3 P_4) = a P_4 ;$

4°) $(P_1 P_2) = c P_4 , (P_1 P_3) = \alpha P_1 , (P_2 P_3) = \alpha P_2 ,$
$(P_1 P_4) = (P_2 P_4) = 0 \; (P_3 P_4) = - 2\alpha P_4 .$

Il primo caso però si può comprendere nel terzo; ciò è evidente se $\alpha = 0$; se invece $\alpha \neq 0$, basta sostituire a $P_4$ la rotazione $P_4 - \frac{\beta}{\alpha} P_3$ per rendere $\beta = 0$.

Nel secondo caso per il gruppo si può prendere il gruppo

$$\left\{1 + \frac{K}{4}(x_1^2 - x_2^2)\right\} p_1 + \frac{K}{2} x_1 x_2 p_2 - \frac{a}{2} x_2 p_3 \,,$$
$$\left\{1 + \frac{K}{4}(x_2^2 - x_1^2)\right\} p_2 + \frac{K}{2} x_1 x_2 p_1 + \frac{a}{2} x_1 p_3 \,,$$
$$p_3 \; p_4 \,,\; x_1 p_2 - x_2 p_1 .$$

(¹) Bianchi, op. cit, n. 16.

Dall'equazioni di Killing si trova allora per lo spazio corrispondente l'elemento lineare

$$ds^2 = \frac{\left(1+\frac{a^2}{4}x_2^2\right)dx_1^2 - \frac{a}{2}x_1 x_2 \, dx_1 \, dx_2 + \left(1+\frac{a^2}{4}x_2^2\right)dx_2^2}{\left\{1+\frac{K}{4}(x_1^2+x_2^2)\right\}^2} +$$

$$+ a dx_3 \frac{x_1 \, dx_2 - x_2 \, dx_1}{1+\frac{K}{4}(x_1^2+x_2^2)} + dx_3^2 + dx_4^2 .$$

Il gruppo poi è completo tutte le volte che $a$ e K non son nulli ambedue.

Nel terzo caso per il gruppo si può prendere il seguente

$$p_1 \, , p_2 \, , p_4 \, , p_3 + \alpha(x_1 p_1 + x_2 p_2) + a x_4 p_4 \, , x_1 p_2 - x_2 p_1 \, ,$$

e per lo spazio corrispondente si trova l'elemento lineare

$$ds^2 = e^{-2\alpha x_3}(dx_1^2 + dx_2^2) + dx_3^2 + e^{-2a x_3} dx_4^2 .$$

Il gruppo è completo tutte le volte, che non è $a = \alpha$: in quest'ultimo caso l' $S_4$ è a curvatura costante ed ammette quindi un $G_{10}$ e non solo un $G_4$.

Infine nell'ultimo caso per il gruppo si può prendere

$$p_1 - \frac{c}{2} x_2 p_4 \, , p_2 + \frac{c}{2} x_1 p_4 \, , p_3 + \alpha(x_1 p_1 + x_2 p_2) + 2\alpha x_4 p_4 \, , p_4 \, , x_1 p_2 - x_2 p_1 \, ,$$

e l'elemento lineare dello spazio corrispondente risulta allora

$$ds^2 = e^{-2\alpha x_3} \left\{ \left(1 + \frac{c^2}{4} x_2^2 e^{-2\alpha x_3}\right) dx_1^2 - \frac{c^2}{2} x_1 x_2 e^{-2\alpha x_3} dx_1 \, dx_2 + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{c^2}{4} x_1^2 e^{-2\alpha x_3}\right) dx_2^2 \right\} + c a^{-4\alpha_3 x} dx_4 \} x_1 \, dx_2 - x_2 \, dx_1 \{ +$$

$$+ dx_3^2 + e^{-4\alpha x_3} dx_4^2 .$$

Il gruppo è certo completo quando si escluda che sia $c = 0$ o $\alpha = 0$, in caso cui si rientra nei precedenti.

5. Veniamo ora al secondo dei casi enumerati: posto allora

$$P_i = p_i + \cdots \, , X_1 = x_1 p_2 - x_2 p_1 + \cdots \, , X_2 = x_3 p_4 - x_4 p_3 + \cdots \, ,$$

poichè $(X_1 X_2) = 0$, si potrà supporre come sopra

$$(P_1 X_1) = P_2 \, , (P_2 X_1) = - P_1 \, , (P_3 X_2) = P_4 \, , (P_4 X_2) = - P_3 .$$

Ed ora basta scrivere le solite identità Jacobiane per avere

$$(P_1 P_3) = (P_1 P_4) = (P_2 P_3) = (P_2 P_4) = 0 \, , (P_1 P_2) = K_1 X_1 \, , (P_3 P_4) = K_2 X_2 .$$

Un gruppo di questa composizione è dato dal gruppo

$$\left\{1-\frac{K_1}{4}(x_1^2+x_2^2)\right\}p_i+\frac{K_1}{2}x_i(x_1p_1+x_2p_2)\,(i=1\,,2)\,,$$

$$\left\{1-\frac{K_2}{4}(x_3^2+x_4^2)\right\}p_i+\frac{K_2}{2}x_i(x_3p_3+x_4p_4)\,(i=3\,,4)\,,$$

$$x_1p_2-x_2p_1\quad,\quad x_3p_4-x_4p_3\,,$$

L'elemento lineare dello spazio, che lo ammette come gruppo di movimenti, è

$$ds^2=\frac{dx_1^2+dx_2^2}{\left\{1+\frac{K_1}{2}(x_1^2+x_2^2)\right\}^2}+\frac{dx_3^2+dx_4^2}{\left\{1+\frac{K_2}{2}(x_3^2+x_4^2)\right\}^2}\,,$$

ed il gruppo di movimenti è quello completo ammesso dallo spazio, se non è $K_1=K_2=0$.

6. Passiamo al terzo caso: posto allora

$$P_i=p_i+\cdots(i=1\,,\ldots,4)$$

$X_1=x_1p_2-x_2p_1+\cdots$, $X_2=x_1p_3-x_3p_2+\cdots$, $X_3=x_1p_3-x_3p_1+\cdots$ si ha

$$(X_1X_2)=X_3\,,(X_2X_3)=X_1\,,(X_3X_1)=X_2\,.$$

Inoltre nel solito modo si potrà supporre

$$(P_1X_1)=P_2\,,(P_1X_3)=P_3\,,(P_2X_1)=-P_1+aX_2+bX_3\,.$$

Poichè se al posto di $P_1$, e $P_2$ si prendono rispettivamente $P_1+\alpha X_2+\beta X_3$, e $P_2-\alpha X_3+\beta X_2$ le formule precedenti non cambiano, si potrà anche supporre

$$(P_1X_1)=a_1X_2+a_2X_3\,.$$

Scrivendo ora le identità Jacobiane tra una delle $P_1$, $P_2$, $P_3$ e due delle X, si trova

$$a=b=a_1=a_2=0$$

e quindi

$$(P_2X_1)=-P_1\,,(P_1X_2)=0\,,$$

ed anche

$$(P_2X_2)=P_3\,,(P_3X_2)=-P_2\,,(P_3X_3)=-P_1\,,(P_3X_1)=(P_2X_3)=0\,.$$

Ponendo poi (come certo si può fare col prendere convenientemente la $P_4$):

$$(P_4X_1)=\alpha X_1\,,(P_4X_2)=\beta X_1+\gamma X_2\,,$$

e scrivendo le identità Jacobiane tra $P_4$ e due delle X si ha subito

$$\alpha=\beta=\gamma=0\quad\text{e}\quad(P_4X_1)=(P_4X_2)=(P_4X_3)=0\,.$$

Dalle tre equazioni

$$((P_1 P_2) X_2) = (P_1 P_3) , ((P_2 P_3) X_1) = -(P_1 P_3) , ((P_1 P_3) X_3) = 0 ,$$

viene subito

$$(P_1 P_3) = a P_2 + K X_3 .$$

Ma prendendo al posto di $P_1 , P_2 , P_3$ rispettivamente $P_1 - \frac{a}{2} X_2 , P_2 + \frac{a}{2} X_3$, $P_3 - \frac{a}{2} X_1$ si rende $a = 0$ senza alterare le altre formule, dopo di che si ha subito

$$(P_1 P_2) = K X_1 , (P_2 P_3) = K X_2 , (P_1 P_3) = K X_3 .$$

Scrivendo le identità con $P_4$ si trova anche

$$(P_1 P_4) = (P_2 P_4) = (P_3 P_4) = 0 .$$

Un gruppo con la composizione trovata è il gruppo

$$P_i = \left\{ 1 - \frac{K}{4} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right\} p_i + \frac{K}{2} x_i (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) , (i = 1 , 2 , 3)$$

$$P_4 = p_4 ;$$

$$X_1 = x_1 p_2 - x_2 p_1 \quad , \quad X_2 = x_2 p_3 - x_3 p_2 \quad , \quad X_3 = x_1 p_3 - x_3 p_1 .$$

Lo spazio che lo ammette come gruppo di movimenti, ha per elemento lineare

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{\left\{ 1 + \frac{K}{4} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right\}^2} + dx_4^2 ,$$

ed oltre quelle non ammette altre trasformazioni, a meno che sia $K = 0$.

7. Nel quarto caso si avrà

$$P_i = p_i + \cdots (i = 1 , \ldots , 4) , X_1 = x_1 p_2 - x_2 p_1 + x_3 p_4 - x_4 p_3 + \cdots ,$$

$$X_2 = x_2 p_4 - x_4 p_2 - x_1 p_3 + x_3 p_1 + \cdots ,$$

$$X_3 = x_1 p_4 - x_4 p_1 + x_2 p_3 - x_3 p_2 + \cdots$$

con

$$(X_1 X_2) = 2 X_3 \quad , \quad (X_2 X_3) = 2 X_1 \quad , \quad (X_3 X_1) = 2 X_2 .$$

Si potrà supporre allora

$$(P_1 X_1) = P_2 \quad , \quad (P_1 X_2) = - P_3 \quad , \quad (P_1 X_3) = P_4 .$$

Se poi è

$$(P_2 X_1) = - P_1 + \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 ,$$

pur di prendere al posto di $P_1 , P_2 , P_3 , P_4$ ordinatamente

$$P_1 - \alpha X_1 + \frac{\beta}{3} X_2 + \frac{\gamma}{3} X_3 , \; P_2 - \frac{2\beta}{3} X_3 + \frac{2\gamma}{3} X_2 ,$$

$$P_3 + 2\alpha X_3 + \frac{2\gamma}{3} X_2 , \; P_4 + 2\alpha X_2 - \frac{2\beta}{3} X_1 ,$$

senza alterare le altre formule si rende $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dopo ciò viene facilmente dalle identità Jacobiane

$$(P_2 X_2) = P_4, (P_2 X_3) = P_3, (P_3 X_1) = P_4, (P_3 X_2) = P_1, (P_3 X_3) = -P_2$$
$$(P_4 X_1) = -P_3, (P_4 X_2) = -P_2, (P_4 X_3) = -P_1.$$

Ma in tal caso si ha per es. $((P_1 P_2) X_1) = 0$ onde $(P_1 P_2) = aX_1$; analogamente $(P_1 P_3) = bX_2$, $(P_1 P_4) = cX_3$, $(P_2 P_3) = dX_3$, $(P_2 P_4) = eX_2$, $(P_3 P_4) = fX_1$. Basta ora scrivere le identità tra tre P per trovare $a = b = c = d = e = f = 0$; perciò potendo porre $P_i = p_i$, lo spazio, che ammette un tal gruppo è l'Euclideo. Questo caso si può dunque tralasciare.

8. Nel quinto caso oltre le 7 trasformazioni del numero precedente ce n'è un'ottava, cioè

$$X_4 = x_1 p_2 - x_2 p_1 - x_3 p_4 + x_4 p_3 + \cdots,$$

essendo $(X_i X_4) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Come nel caso precedente ci si può ridurre al caso, che sia

$$(P_1 X_1) = P_2, (P_1 X_2) = -P_3, (P_1 X_3) = P_4, (P_2 X_1) = -P_1,$$

dopo di che si trova facilmente

$$(P_2 X_2) = P_4, (P_2 X_3) = P_3, (P_3 X_1) = P_4, (P_3 X_2) = P_1$$
$$(P_3 X_3) = -P_2, (P_4 X_1) = -P_3, (P_4 X_2) = -P_2, (P_4 X_3) = -P_1.$$

Dalle due equazioni

$$((P_1 X_4) X_1) = (P_2 X_4) \quad , \quad ((P_2 X_4) X_1) = -(P_1 X_4)$$

viene

$$(((P_1 X_4) X_1) X_1) = -(P_1 X_4),$$

e perciò

$$(P_1 X_4) = -P_2.$$

Analogamente

$$(P_2 X_4) = -P_1 \ , \ (P_3 X_4) = -P_4 \ , \ (P_4 X_3) = -P_3.$$

Ora avendosi $((P_1 P_2) X_1) = 0$ se ne ricava

$$(P_1 P_2) = a_1 X_1 + b_1 X_4;$$

ed analogamente si ha

$$(P_1 P_3) = a_2 X_2 + b_2 X_4, (P_1 P_4) = a_3 X_3 + b_3 X_4 \ , \ (P_2 P_3) = a_4 X_3 + b_4 X_4,$$
$$(P_2 P_4) = a_5 X_2 + b_5 X_4 \ , \ (P_3 P_4) = a_6 P_1 + b_6 P_6.$$

Dalle identità tra $P_1, P_3, X_4$ e $P_1, P_4, X_4$ si ricava

$$a_3 = a_4 \ , \ a_1 = -a_5 \ , \ b_3 = b_4 \ , \ b_1 = -b_5$$

e da quella tra $P_1, P_2, X_2$ ed analoghe

$$a_1 = a_3 = -a_2 = a_6 \quad b_2 = b_3 = 0 \quad b_1 = -b_6:$$

sicchè si può porre

$$(P_1 P_2) = aX_1 + bX_4, (P_1 P_3) = -aX_2, (P_1 P_4) = aX_3, (P_2 P_3) = aX_3$$
$$(P_2 P_4) = aX_2, (P_3 P_4) = aX_1 - bX_4.$$

Dopo di che, per es., l'identità tra $P_1$, $P_2$, $P_3$ dà

$$b = 3a.$$

Un gruppo della composizione scritta è il seguente:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{1 - a(x_1^2 - x_2^2)\}\, p_1 - 2a x_1 x_2 p_2 - a(x_1 x_3 + x_2 x_4)\, p_3 - \\
&\qquad - a(x_1 x_4 - x_2 x_3)\, p_4 ; \\
P_2 &= \{1 - a(x_2^2 - x_1^2)\}\, p_2 - 2a x_1 x_2 p_1 + a(x_1 x_4 x_2 x_3)\, p_3 - \\
&\qquad - a(x_1 x_3 + x_2 x_4)\, p_4 ; \\
P_3 &= \{1 - a(x_3^2 - x_4^2)\}\, p_3 - 2a x_3 x_4 p_3 - a(x_1 x_3 + x_2 x_4)\, p_1 + \\
&\qquad + a(x_1 x_4 - x_2 x_3)\, p_2 ; \\
P_4 &= \{1 - a(x_4^2 - x_3^2)\}\, p_4 - 2a x_3 x_4 p_3 - - a(x_1 x_4 - x_2 x_3)\, p_1 - \\
&\qquad - a(x_1 x_3 + x_2 x_4)\, p_2 ;
\end{aligned}$$

$$X_1 = x_1 p_2 - x_2 p_1 + x_3 p_4 - x_4 p_3 ; \quad X_2 = x_2 p_4 - x_4 p_2 - x_1 p_3 + x_3 p_1 ;$$
$$X_3 = x_1 p_4 - x_4 p_1 + x_2 p_3 - x_3 p_2 ; \quad X_4 = x_1 p_2 - x_2 p_1 - x_3 p_4 + x_4 p_3 ;$$

Lo spazio, che lo ammette ha per elemento lineare

$$ds^2 = \frac{\{1-a(x^2_3+x^2_4)\}\,(dx^2_1+x^2_2)+\{1-a(x^2_1+x^2_2)\}(dx^2_3+dx^2_4)+}{\{1-a(x^2_1+x^2_2+x^2_3+x^2_4)\}^2}$$
$$\frac{+2a(x_1x_4+x_2x_3)\,(dx_1dx_4+dx_2dx_3)+2a(x_1x_3-x_2x_4)\,(dx_1dx_3-dx_2dx_4)}{\{1-a(x^2_1+x^2_2+x^2_3+x^2_4)\}^2},$$

e non ammette altre trasformazioni, fuorchè nel caso $a = 0$.

9. Infine nell'ultimo caso, l'$S_4$ è, come è ben noto, a curvatura costante, e per il gruppo e per l'elemento lineare si possono prendere i seguenti

$$P_i = \left\{1 - \frac{K}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\right\} p_i + \frac{K}{2} x_i (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4),$$

$$x_i p_k - x_k p_i \quad (i, k = 1, \dots, 4)$$

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}{\left\{1 + \frac{K}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\right\}}.$$

**Meccanica.** — *Sul moto di un cilindro indefinito in un liquido viscoso.* Nota del prof. G. Picciati, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

Nella Memoria [1] « *On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums* » lo Stokes, insieme ad altri problemi, ha trattato anche quello del moto oscillatorio lento di un cilindro indefinito in una massa illimitata di fluido viscoso, in direzione perpendicolare al suo asse. Passando poi a considerare il moto traslatorio, egli ha inoltre dimostrato che in questo caso del cilindro, a differenza di quanto avviene per la sfera, non esiste un regime stazionario, in cui il cilindro si muova con

[1] Math. and Phys. Papers, t. III. Cambridge, 1901.